2010

Aug.rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2xy - 2x - 2y + 3$.

a) Demonstrați că $x \circ y = 2(x-1)(y-1)+1$, pentru oricare $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Determinați elementul neutru al legii „$\circ$”.

c) Dați exemplu de două numere $a, b \in \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$ pentru care $a \circ b \in \mathbb{Z}$.

August

2. Fie polinomul $f \in \mathbb{Z}_3[X], f = X^3 + \hat{2}X^2$ și mulțimea $G = \{g = aX^3 + bX^2 + cX + d \mid a,b,c,d \in \mathbb{Z}_3\}$.

a) Calculați $f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul elementelor mulțimii G.

Iulie rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se consideră legea de compoziție $x * y = (x-4)(y-4)+4$.

a) Demonstrați că legea „$*$” este asociativă.

b) Demonstrați că $x * y \in (4, +\infty)$, oricare ar fi $x, y \in (4, +\infty)$.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2010$.

Iulie

2. Se consideră polinoamele $f, g \in \mathbb{Z}_3[X]$, $f = X^2 + X$, $g = X^2 + \hat{2}X + a$, cu $a \in \mathbb{Z}_3$.

a) Calculați $f(\hat{0}) + f(\hat{1})$.

b) Determinați rădăcinile polinomului f.

c) Demonstrați că $f(\hat{0}) + f(\hat{1}) + f(\hat{2}) = g(\hat{0}) + g(\hat{1}) + g(\hat{2})$, pentru oricare $a \in \mathbb{Z}_3$.

2011

Aug.rezerva

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție $x * y = xy + x + y$.

a) Arătați că legea „$*$” este asociativă.

b) Determinați elementul neutru al legii „$*$”.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x^2 * 2 = x * 4$.

August

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = 2xy - 6x - 6y + 21$.

a) Arătați că $x * y = 2(x-3)(y-3) + 3$, oricare ar fi $x, y \in \mathbb{R}$.

b) Arătați că legea „$*$” este asociativă.

c) Calculați $1 * 2 * ... * 2011$.

Iulie

2. Pe mulțimea $\mathbb{R}$ se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = \frac{1}{2}(xy - x - y + 3)$.

a) Verificați dacă elementul neutru al legii „$\circ$” este $e = 3$.

b) Determinați simetricul elementului 2 în raport cu legea „$\circ$”.

c) Arătați că mulțimea $H = \{2k+1 \mid k \in \mathbb{Z}\}$ este parte stabilă a lui $\mathbb{R}$ în raport cu legea de compoziție „$\circ$”.

2012

IUlie

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX^2 + mX + 1$, unde $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 0$, calculați restul împărțirii polinomului f la $X - 1$.

b) Arătați că polinomul f este divizibil cu $X + 1$, pentru orice număr real m.

c) Determinați valorile reale ale lui m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale.

Iulie rez.

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - 3X - 1$, cu rădăcinile x_1, x_2, x_3.

a) Arătați că polinomul f se divide cu $X - 1$.

b) Calculați $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$.

c) Verificați dacă $(2 - x_1)(2 - x_2)(2 - x_3) = 13$.

Olimpici

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 1$.

a) Arătați că $x * 1 = x$, pentru orice $x \in \mathbb{R}$.

b) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x * x * x = 4$.

c) Determinați numărul natural n, $n \geq 2$, pentru care $C_n^1 * C_n^2 = 14$.

Model

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + (m-3)X^2 - 17X + (2m+7)$, cu $m \in \mathbb{R}$.

a) Pentru $m = 4$ determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X - 3$.

b) Determinați $m \in \mathbb{R}$ pentru care polinomul f este divizibil cu $X - 1$.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $27^x + 9^x - 17 \cdot 3^x + 15 = 0$.

2013

Aug.rezerva

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 + X$.

a) Arătaţi că $f(-1) = 0$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 + X$.

c) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, ştiind că x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

August

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 + 2X$.

a) Calculaţi $f(1)$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la $X - 2$.

c) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Iulie rezerva

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x \circ y = x + y + 3$.

a) Calculaţi $2 \circ (-2)$.

b) Arătaţi că $e = -3$ este elementul neutru al legii de compoziţie „$\circ$”.

c) Determinaţi numărul real x pentru care $2013 \circ (-2013) = x \circ x$.

Iulie

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 + 1$.

a) Arătaţi că $f(1) = 0$.

b) Determinaţi câtul şi restul împărţirii polinomului f la polinomul $g = X^2 - 2X + 1$.

c) Calculaţi $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$, unde x_1, x_2, x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Olimpici

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă dată de $x * y = x + y - 2$.

a) Calculaţi $5 * (-5)$.

b) Arătaţi că legea de compoziţie „$*$” este comutativă.

c) Calculaţi $(-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3$.

Model

2. În $\mathbb{R}[X]$ se consideră polinomul $f = X^3 - X^2 + aX + b$.

a) Calculați $a+b$, știind că $f(1)=0$.

b) Pentru $a=-1$ și $b=1$, determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numerele reale a și b, știind că $x_1 = 1$ și $x_2 = 2$ sunt rădăcini ale polinomului f.

2014

Aug.rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = xy - 5x - 5y + 30$.

a) Arătați că $1*5=5$.

b) Arătați că $x*y=(x-5)(y-5)+5$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x*x=x$.

August

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 4X^2 + X + 2$.

a) Arătați că $f(1)=0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f prin $X-1$.

c) Arătați că $(x_1+x_2+x_3)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\frac{1}{x_3}\right)=-2$ știind că x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Iulie rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = x + y + xy$.

a) Arătați că $(-1)\circ 1 = -1$.

b) Arătați că $x \circ y = (x+1)(y+1)-1$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $(x+1)\circ(x-3)=4$.

Iulie

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Arătați că $0 \circ (-4) = -4$.

b) Arătați că $x \circ y = (x+4)(y+4)-4$ pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = 12$.

Olimpici

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2(x + y - 1) - xy$.

a) Arătaţi că $1 * 2 = 2$.

b) Arătaţi că $x * 2 = 2 * x = 2$ pentru orice număr real x.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x * x = x$.

Simulare

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie comutativă $x * y = x + y - 5$.

a) Arătaţi că $2 * (-2) = 2014 * (-2014)$.

b) Verificaţi dacă legea „*” este asociativă.

c) Calculaţi $(-4) * (-3) * (-2) * (-1) * 0 * 1 * 2 * 3 * 4$.

Model

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x \circ y = xy - 3(x + y) + 12$.

a) Arătaţi că $x \circ 3 = 3 \circ x = 3$, pentru orice număr real x.

b) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $x \circ x = x$.

c) Calculaţi $1 \circ 2 \circ \ldots \circ 2014$.

2015

August

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 5X^2 + 5X - 1$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Arătați că $f(a) + f(-a) + 2 \leq 0$, pentru orice număr real a.

c) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 15x_1x_2x_3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Aug.rezerva

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 2X^2 - 6X + 3$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X - 3$.

c) Demonstrați că $x_1 + x_2 + x_3 + \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 0$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Iulie rezerva

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.

a) Arătați că $f(1) = -2$.

b) Arătați că polinomul f este divizibil cu polinomul $X+1$.

c) Determinați numărul real a pentru care $\frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = a(x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Iulie

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 4x + 4y + 12$.

a) Arătați că $5 \circ (-4) = -4$.

b) Arătați că $x \circ y = (x+4)(y+4) - 4$, pentru orice numere reale x și y.

c) Rezolvați în mulțimea numerelor reale ecuația $x \circ x = x$.

Olimpici

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 5X^2 + X + 5$.

a) Arătați că $f(-5) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 6X + 5$.

c) Demonstrați că $\frac{x_3}{x_1x_2} + \frac{x_2}{x_1x_3} + \frac{x_1}{x_2x_3} = -\frac{23}{5}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Model

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie dată de $x \circ y = -xy + x + y$.

a) Calculaţi $1 \circ 2015$.

b) Arătaţi că $x \circ y = -(x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x şi y.

c) Rezolvaţi în mulţimea numerelor reale ecuaţia $3^x \circ 5^x = 1$.

2016

August

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 3x + 3y + 6$.

a) Arătați că $1 \circ (-3) = -3$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați valorile reale ale lui x, pentru care $x \circ x \le x$.

Iulie rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x * y = \frac{1}{3}xy + x + y$.

a) Arătați că $1 * (-3) = -3$.

b) Demonstrați că $x * y = \frac{1}{3}(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x * \frac{1}{x} = -3$.

Iulie

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 2X^2 - 2X + 1$.

a) Arătați că $f(1) = -2$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c) Demonstrați că $(x_2 + x_3)(x_3 + x_1)(x_1 + x_2) = -3$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Olimpici

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy + 2x + 2y + 2$.

a) Arătați că $1 \circ (-2) = -2$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x+2)(y+2) - 2$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele reale nenule x, pentru care $x \circ \frac{1}{x} = x$.

Simulare

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - x - y + 2$.

a) Arătați că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Calculați $0 * 1 * 2 * 3$.

c) Determinați numerele reale a, știind că $a * a * 2016 = 2016$.

Model

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + X^2 + 4X + 4$.

a) Arătați că $f(-1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X^2 + 3X + 2$.

c) Demonstrați că $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} + \frac{1}{x_1x_2} + \frac{1}{x_2x_3} + \frac{1}{x_3x_1} = -\frac{3}{4}$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

2017

August

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + 3X^2 - X - 3$.

a) Arătați că $f(1) = 0$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 2$.

c) Demonstrați că $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 11$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Iulie

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 3x - 3y + 12$.

a) Arătați că $1 \circ 3 = 3$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x-3)(y-3) + 3$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul real x, pentru care $(x \circ x) \circ x = 3$.

Iulie rezerva

2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 + 3X^2 - X - 2$.

a) Arătați că $f(1) = 2$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X + 1$.

c) Determinați rădăcinile polinomului f.

Olimpici

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = x + y - 3$.

a) Arătați că $1 * 2 = 0$.

b) Determinați numerele reale x pentru care $(x^2) * x = -1$.

c) Determinați numerele naturale nenule n pentru care $n * n * n * n < 3$.

Simulare

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie $x * y = 2xy + 6x + 6y + 15$.

a) Arătaţi că $x * y = 2(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x şi y.

b) Arătaţi că $7 * 98 = 2017$.

c) Determinaţi numerele reale x, pentru care $x * (x+2) = 3$.

Model

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 3X^2 - 6X + 8$.

a) Arătați că $f(2) = -8$.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la polinomul $X - 1$.

c) Demonstrați că $(x_1+1)^2 + (x_2+1)^2 + (x_3+1)^2 = 30$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

2018

August

2. Se consideră polinomul $f = X^3 + mX - 6$, unde m este număr real.

a) Arătați că $f(1) = m - 5$, pentru orice număr real m.

b) Determinați numărul real m pentru care $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

c) Pentru $m = -7$, determinați numerele reale p și q, pentru care $f = (X+1)\left(X^2 + pX + q\right)$.

Iulie rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = xy - 9(x+y) + 90$.

a) Arătați că $10 \circ 8 = 8$.

b) Demonstrați că $x \circ y = (x-9)(y-9) + 9$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ n \leq 10$.

Iulie

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x \circ y = 5xy + 15(x+y) + 42$.

a) Arătați că $(-2) \circ (-2) = 2$.

b) Demonstrați că $x \circ y = 5(x+3)(y+3) - 3$, pentru orice numere reale x și y.

c) Determinați numărul real x, pentru care $(x-3) \circ (x-3) \circ (x-3) = 197$.

Olimpici

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - (x+y) + 2$.

a) Arătați că $2 * 2 = 2$.

b) Demonstrați că $x * y = (x-1)(y-1) + 1$, pentru orice numere reale x și y.

c) Calculați $1 * 2 * 3 * \ldots * 2018$.

Simulare

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție asociativă $x * y = xy - 2(x+y) + 6$.

a) Demonstrați că $x * y = (x-2)(y-2) + 2$, pentru orice numere reale x și y.

b) Determinați numărul real x, pentru care $x * 3 = 2018$.

c) Calculați $\log_2 2 * \log_2 3 * \log_2 4 * \ldots * \log_2 2018$.

Model

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 3xy + 3x + 3y + 2$.

a) Arătați că $x \circ y = 3(x+1)(y+1) - 1$, pentru orice numere reale x și y.

b) Arătați că $x \circ \left(-\frac{2}{3}\right) = x$, pentru orice număr real x.

c) Determinați numerele naturale n pentru care $n \circ (n-1) < 17$.

2019

August rezerva

2. Pe mulțimea numerelor reale se definește legea de compoziție $x \circ y = 2(x+y) - \frac{xy}{2}$.

a) Arătați că $2 \circ (-2) = 2$.

b) Determinați numărul natural nenul n pentru care $n \circ \frac{1}{n} = \frac{9}{2}$.

c) Determinați numărul real y astfel încât $x \circ y = 8$, pentru orice număr real x.

August

2. Se consideră polinomul $f = 2X^3 - 4X^2 + 4X - 3$.

a) Arătați că $f(0) = -3$.

b) Demonstrați că numărul $a = \frac{3}{x_1} + \frac{3}{x_2} + \frac{3}{x_3}$ este natural, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile lui f.

c) Demonstrați că polinomul f **nu** are toate rădăcinile reale.

Iulie

2. Se consideră polinomul $f = mX^3 + 2X^2 - mX - 2$, unde m este număr real nenul.

a) Arătați că $f(1) = 0$, pentru orice număr real nenul m.

b) Pentru $m = 3$, determinați rădăcinile polinomului f.

c) Determinați numărul real nenul m pentru care $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = -4$, unde x_1, x_2 și x_3 sunt rădăcinile polinomului f.

Simulare

2. Pe mulţimea numerelor reale se defineşte legea de compoziţie asociativă $x * y = x + y - \frac{xy}{4}$.

a) Arătaţi că $6 * 2 = 5$.

b) Determinaţi numerele reale x pentru care $x * (4x) = 6$.

c) Calculaţi $1 * 2 * 3 * \ldots * 2019$.

Model

2. Se consideră polinomul $f = X^3 - 7X^2 + mX - 8$, unde m este număr real.

a) Arătați că $f(-1) + f(1) = -30$, pentru orice număr real m.

b) Determinați câtul și restul împărțirii polinomului f la $X^2 - 3X + 1$, știind că f se divide cu $X - 2$.

c) Determinați numărul real m pentru care polinomul f are trei rădăcini reale pozitive, în progresie geometrică.