2010

Aug.rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x^2+3}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,2)$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

August

1. Se consideră funcția $f:[0,1]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{e^x}{1+x}$.

a) Demonstrați că $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{x}{x+1}$, oricare ar fi $x\in[0,1]$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe $[0,1]$.

c) Demonstrați că $\dfrac{2}{e}\le\dfrac{1}{f(x)}\le 1$, oricare ar fi $x\in[0,1]$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2+\dfrac{2}{x}$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(2,5)$.

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^2\cdot e^x$.

a) Calculați $f'(x)$.

b) Demonstrați că funcția f este descrescătoare pe intervalul $[-2,0]$.

c) Demonstrați că $0\le f(x)+f(x^2)\le\dfrac{e^2+1}{e}$, oricare ar fi $x\in[-1,0]$.

2011

Aug.rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\setminus\{1\}\to\mathbb{R}, f(x)=\dfrac{x+2}{(x-1)^2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{-x-5}{(x-1)^3}$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$.

b) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

c) Arătați că $f(x)+\dfrac{1}{12}\geq 0$, oricare ar fi $x\in(-\infty,1)$.

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2+x+3^x$.

a) Calculați $f'(0)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Arătați că $a^3+a^2+a-b^3-b^2-b\leq 3^b-3^a$, oricare ar fi numerele reale a, b cu $a\leq b$.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}, f(x)=\ln x+e^x$.

a) Arătați că $xf'(x)=1+xe^x$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(1,e)$.

c) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)}{x}$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}, f(x)=e^x-x$.

a) Demonstrați că $f'(x)-f(x)=x-1$, oricare ar fi $x\in\mathbb{R}$.

b) Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$, situat pe graficul funcției f.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției f spre $-\infty$.

2012

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{2x^2-1}{x^2+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{10x}{\left(x^2+2\right)^2}$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $-\frac{1}{2}\le f(x)\le\frac{1}{3}$, pentru orice $x\in[0,1]$.

Iulie rez.

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\sqrt{x}-\ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)-f(4)}{x-4}=0$.

b) Demonstrați că funcția f este crescătoare pe intervalul $(4,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei verticale la graficul funcției f.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x+1}{e^x}$.

a) Arătați că $\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{x}{x+1}$ pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția f este descrescătoare pe $(0,+\infty)$.

c) Determinați ecuația asimptotei oblice la graficul funcției $g:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ g(x)=\frac{e^{2x}\cdot f^2(x)}{x}$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=\begin{cases}\frac{-4}{x^2+1}, & x\le 0\\ x-4, & x>0\end{cases}$.

a) Demonstrați că funcția f este continuă în punctul $x_0=0$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to 4}\frac{f(x)}{16-x^2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul $A(-1,-2)$.

2013

Aug.rezerva

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+10-\dfrac{11}{x}$.

a) Verificaţi dacă $f'(x)=\dfrac{x^2+11}{x^2}$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

August

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x+2)^3$.

a) Verificaţi dacă $f'(x)=3x^2+12x+12$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătaţi că funcţia f este crescătoare pe $\mathbb{R}$.

c) Calculaţi $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{x^2}$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcţia $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x+1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$.

b) Arătați că funcţia f este descrescătoare pe intervalul $(0,+\infty)$.

c) Determinaţi ecuaţia tangentei la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

Iulie

1. Se consideră funcţia $f:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{x}-1$.

a) Arătaţi că $2\sqrt{x}f'(x)=1$, pentru orice $x\in(0,+\infty)$.

b) Verificaţi dacă dreapta de ecuaţie $y=\dfrac{1}{4}x$ este tangentă la graficul funcţiei f în punctul de abscisă $x_0=4$, situat pe graficul funcţiei f.

c) Arătaţi că funcţia f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Olimpici

1. Se consideră funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=xe^x$.

a) Arătaţi că $f'(x)=(x+1)e^x$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

b) Verificaţi dacă $f''(x)+f(x)=2f'(x)$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

c) Arătaţi că funcţia f are un punct de extrem.

Model

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x\ln x$.

a) Verificați dacă $f'(x)=1+\ln x$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că funcția f este crescătoare pe $\left[\frac{1}{e},+\infty\right)$.

c) Demonstrați că $f(x)\geq -\frac{1}{e}$, oricare ar fi $x\in(0,+\infty)$.

2014

Aug.rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-x$.

a) Arătați că $f'(x)=2x-1,\ x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x^2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

August

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=x^2-\ln x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to1}f(x)=1$.

b) Arătați că $f'(x)=2x-\frac{1}{x},\ x\in(0,+\infty)$.

c) Arătați că funcția f este convexă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{x-1}{x-2}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to3}f(x)=2$.

b) Arătați că $f'(x)=-\frac{1}{(x-2)^2},\ x\in(2,+\infty)$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=3$, situat pe graficul funcției f.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln x-\frac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x+1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}=\frac{3}{4}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=1$, situat pe graficul funcției f.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-1)e^x$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=-1$.

b) Arătați că $f'(x)=e^x+f(x)$ pentru orice număr real x.

c) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+1}{x}=0$.

Simulare

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+7$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(0)}{x}=-3$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x(2x+1)(3x+2)}$.

c) Demonstrați că $f(x)\ge 5$ pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=e^x-x$.

a) Calculați $f'(x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x_0=0$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $e^x\ge x+1$, pentru orice $x\in\mathbb{R}$.

2015

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+1$.

a) Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $f(2012)+f(2014)\le f(2013)+f(2015)$.

Aug.rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+1$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f(x)-x^3}{x}$.

c) Arătați că $-1\le f(x)\le 3$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\dfrac{1}{x}$.

a) Arătați că $f'(x)=1+\dfrac{1}{x^2}$, $x\in(0,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f este concavă pe intervalul $(0,+\infty)$.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3+3x^2+5$.

a) Arătați că $f'(x)=6x(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{f'(x)}{f(x)-2x^3}$.

c) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+1$.

a) Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $0\le f(x)\le 1$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{3x}{x^2+1}$.

a) Calculați $\lim_{x\to 1} f(x)$.

b) Arătați că $f'(x)=-\frac{3(x-1)(x+1)}{(x^2+1)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

c) Determinați intervalele de monotonie ale funcției f.

2016

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-3x^2+7$.

a) Arătați că $f'(x)=6x(x-1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)-11}{x-2}=12$.

c) Demonstrați că $f(x)\geq 6$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x\to 0}\frac{f(x)+3x}{x}=0$.

c) Demonstrați că $f(x)\geq -2$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=-x^3+3x+2$.

a) Arătați că $f'(x)=3(1-x)(1+x)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim_{x\to 2}\frac{f(x)}{x-2}=-9$.

c) Demonstrați că $f(x)\leq 4$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+x^2-x+1$.

a) Arătați că $f'(x)=3x^2+2x-1$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{xf'(x)}{f(x)}=3$.

c) Determinați abscisele punctelor situate pe graficul funcției f în care tangenta la graficul funcției f este paralelă cu dreapta $y=4x+1$.

Simulare

1. Se consideră funcția $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x+1}{x}$.

a) Calculați $\lim\limits_{x\to2}\frac{f(x)-f(2)}{x-2}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $\frac{2017}{2016}\le f(x)\le 2$, pentru orice $x\in[1, 2016]$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-12x$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x-2)(x+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=2$, situat pe graficul funcției f.

c) Arătați că $-16\le f(x)\le 16$, pentru orice $x\in[-2,2]$.

2017

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-6x+4$.

a) Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to1}\frac{f(x)}{x-1}=0$.

c) Demonstrați că $0\le f(x)\le 8$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+6x+2$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x^2+2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f'(x)}{x+2}=3$.

c) Demonstrați că $-5\le f(x)\le 9$, pentru orice $x\in[-1,1]$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^4-2x^2+12$.

a) Arătați că $f'(x)=4x(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x^2+1}{f(x)-x^4}=-\frac{1}{2}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3+2x^2+x$.

a) Arătați că $f'(x)=(x+1)(3x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x\,f'(x)}=\frac{1}{3}$.

c) Demonstrați că $f(x)\ge-\frac{4}{27}$, pentru orice $x\in[-1,+\infty)$.

Simulare

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+1+\frac{1}{x-2}$.

a) Arătați că $\lim\limits_{x\to 3}\frac{f(x)-f(3)}{x-3}=0$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe intervalul $(2,+\infty)$.

Model

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=2x^3-9x^2+12x+1$.

a) Arătați că $f'(x)=6(x-1)(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Calculați $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{2x^3-f(x)}{f'(x)}$.

c) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

2018

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x^2+3$.

a) Arătați că $f'(x)=3x(x-2)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $f(x)\geq -1$, pentru orice $x\in[0,+\infty)$.

Iulie rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2+3}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{(3-x)(x+1)}{\left(x^2+3\right)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că $-1\leq f(x)+f(y)\leq\dfrac{1}{3}$, pentru orice numere reale x și y.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x-2)e^x$.

a) Arătați că $f'(x)=(x-1)e^x$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=0$.

c) Demonstrați că $-e\leq f(x)\leq 0$, pentru orice $x\in(-\infty,2]$.

Olimpici

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+x+1}{x^2+2x+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{x(x+2)}{(x^2+2x+2)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=-1$, situat pe graficul funcției f.

c) Demonstrați că $1\le f(x)+f(y)\le 3$, pentru orice numere reale x și y.

Simulare

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^6-6x+10$.

a) Arătați că $\lim_{x\to 1}\frac{f(x)-5}{x-1}=0$.

b) Determinați intervalele de monotonie a funcției f.

c) Demonstrați că $f(0,9)+f(1,1)\ge 10$.

Model

1. Se consideră funcția $f:(2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^2+6x}{x-2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(x-6)(x+2)}{(x-2)^2}$, $x\in(2,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f **nu** are puncte de inflexiune.

2019

August rezerva

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x}{x^2+4}$.

a) Arătați că $f'(x)=\frac{(2-x)(2+x)}{(x^2+4)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația asimptotei orizontale spre $-\infty$ la graficul funcției f.

c) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

August

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x}{x^6+5}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{5(1-x^3)(1+x^3)}{(x^6+5)^2}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Determinați ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul de abscisă $x=0$ situat pe graficul funcției f.

c) Determinați mulțimea valorilor funcției f.

Iulie

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x^3-3x+5$.

a) Arătați că $f'(x)=3(x-1)(x+1)$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Demonstrați că funcția f este convexă pe $[0,+\infty)$.

c) Demonstrați că $f(x)\le 7$, pentru orice $x\in(-\infty,1]$.

Simulare

1. Se consideră funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3+\dfrac{x-3}{e^x}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{4-x}{e^x}$, $x\in\mathbb{R}$.

b) Arătați că funcția f este convexă pe $[5,+\infty)$.

c) Demonstrați că $x-3\le e^{x-4}$, pentru orice număr real x.

Model

1. Se consideră funcția $f:(-2,+\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\dfrac{x^2+2x+1}{x+2}$.

a) Arătați că $f'(x)=\dfrac{(x+1)(x+3)}{(x+2)^2}$, $x\in(-2,+\infty)$.

b) Determinați ecuația asimptotei oblice spre $+\infty$ la graficul funcției f.

c) Demonstrați că funcția f este convexă pe $(-2,+\infty)$.