1.2. MULŢIMEA NUMERELOR REALE

Scopul acestui paragraf este de a prezenta principalele mulţimi de numere pe care le-aţi studiat în anii precedenţi, indicând pentru fiecare mulţime:

1) proprietăţile algebrice;

2) proprietăţile de ordine;

3) corespondenţa cu punctele unei drepte.

Având în vedere că unele rezultate au fost studiate în anii trecuţi, le vom reaminti. Construcţia acestor mulţimi de numere depăşeşte cadrul acestui manual.

1.2.1. Mulţimea numerelor naturale $\mathbb{N}$

Istoria matematicii începe cu problema numărării, ceea ce a condus, după îndelungi tatonări la conceptul fructuos de număr natural.

Matematicienii secolului al XIX-lea au arătat cum se poate construi riguros mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale plecând de la câteva noţiuni elementare.

Axiomatica numerelor naturale cea mai cunoscută a fost elaborată în 1889 de matematicianul italian

Giuseppe Peano (1858-1932).

Numere cardinale. Sub forma cea mai naivă şi primitivă, problema numărării se poate pune sub forma: fiind date două mulţimi A şi B, care dintre cele două mulţimi are mai multe elemente ?

Numerele cardinale indică mărimea mulţimii, respectiv numărul de elemente ale mulţimii.

Numere ordinale. Au apărut din necesitatea de a stabili o ordine în interiorul unei mulţimi.

Numerele cardinale şi ordinale s-au dezvoltat într-o legătură permanentă unele cu altele şi formează cele două aspecte ale numerelor naturale, la care se adaugă de cele mai multe ori prin convenţie şi numărul zero.

Operaţii pe $\mathbb{N}$

Mulţimea $\mathbb{N}$ a numerelor naturale nu posedă în sine nici o altă proprietate în afară de aceea de a număra. O astfel de mulţime este amorfă sau altfel spus nu este structurată. Mulţimea numerelor naturale este $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, \ldots, n, \ldots\}$, iar $\mathbb{N}^* = \{1, 2, \ldots, n, \ldots\}$ reprezintă mulţimea numerelor naturale nenule.

Adunarea. Cea mai simplă operaţie cu numere naturale face ca la orice două numere $a, b \in \mathbb{N}$ să se asocieze tot un număr natural notat $a + b$.

Proprietăţile adunării pe $\mathbb{N}$

A_1. **Adunarea este asociativă**, adică $(a + b) + c = a + (b + c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

A_2. **Adunarea este comutativă**, adică $a + b = b + a$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

A_3. **Numărul 0 este element neutru pentru adunare**, adică $a + 0 = 0 + a = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. 1) Semnul $+$ apare pentru prima dată cu sensul actual într-un manuscris aflat la biblioteca din Dresda şi scris în jurul lui 1480.

2) Adunarea este considerată o operaţie de **ordinul întâi**.

3) Scăderea numerelor indică pe plan abstract ideea de scădere dintr-o mulţime a unei părţi din elementele acelei mulţimi. Scăderea este operaţia inversă adunării. Diferenţa a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural. Diferenţa dintre numerele $a, b \in \mathbb{N}$ se notează $a - b$.

Înmulţirea. La operaţia de înmulţire s-a ajuns prin adunarea mai multor termeni egali. Această operaţie asociază la două numere naturale $a, b \in \mathbb{N}$ numărul natural $a \cdot b$ sau simplu ab.

Proprietăţile înmulţirii pe $\mathbb{N}$

I_1. **Înmulţirea este asociativă**, adică $(ab)c = a(bc)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{N}$.

I_2. **Înmulţirea este comutativă**, adică $ab = ba$, $\forall a, b \in \mathbb{N}$.

I_3. **Numărul 1 este element neutru pentru înmulţire**, adică $1 \cdot a = a \cdot 1 = a$, $\forall a \in \mathbb{N}$.

Observaţii. 1) Semnele $\cdot$ şi $\times$ sunt utilizate din 1631.

2) Împărţirea numerelor naturale este operaţie inversă a înmulţirii.

Împărţirea a două numere naturale nu este întotdeauna un număr natural.

Împărţirea prin zero nu are sens. Înmulţirea şi împărţirea sunt **operaţii de ordinul doi.**

Ordinea operaţiilor. Dacă intervin mai multe feluri de operaţii, ordinea efectuării operaţiilor are influenţă asupra rezultatului. **Operaţia de ordin superior se efectuează la început.** Operaţiile ale căror semne sunt puncte preced pe cele ale căror semne sunt linii. Dacă operaţiile trebuie făcute în altă ordine, atunci se folosesc parantezele care se vor efectua primele.

Distributivitatea în raport cu adunarea. Legătura între cele două operaţii pe $\mathbb{N}$ este dată de proprietatea

D. Înmulţirea este distributivă în raport cu operaţia de adunare, adică

$$a(b+c) = ab + ac, \forall a, b, c \in \mathbb{N}.$$

Pentru $a \in \mathbb{N}^*$ se notează produsul lui a cu el însuşi de n ori, $n \in \mathbb{N}^*$, astfel: $a^n = \underbrace{a \cdot a \ldots a}_{n}$.

Ansamblul a^n îl numim **putere** în care a este **baza puterii**, iar n este **exponentul puterii.** Au loc proprietăţile:

1) $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$; 2) $(ab)^n = a^n b^n$; 3) $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, $n > m$; 4) $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$, $b \neq 0$; 5) $(a^n)^m = a^{nm}$.

Convenim ca $a^0 = 1$, $a \neq 0$. Operaţiei 0^0 nu i se acordă nici un sens. Ridicarea la putere este o **operaţie de ordinul trei.**

Ordonarea numerelor naturale

Orice număr natural are un succesor, de exemplu 11 este succesorul lui 10. Aceasta înseamnă că în şirul numerelor naturale $0, 1, 2, \ldots, n, n+1, \ldots$ nu există un ultim număr, acest şir fiind infinit. Numărul 0 (zero) nu este succesor. Orice alt număr natural are un predecesor; aceasta înseamnă că şirul numerelor naturale îl are pe 0 (zero) ca primul număr. Pentru orice două numere naturale n_1, n_2 există una din cele trei relaţii: $n_1 < n_2$ (n_1 este strict mai mic decât n_2), $n_1 = n_2$ (n_1 este egal cu n_2), $n_1 > n_2$ (n_1 este strict mai mare decât n_2). Dacă vrem să arătăm că n_1 este cel mult egal cu n_2 atunci scriem $n_1 \leq n_2$. Această relaţie, notată $\leq$, are următoarele proprietăţi:

O_1. **Relatia $\leq$ este reflexivă**, adică $a \leq a, \forall a \in \mathbb{N}$.

O_2. **Relaţia $\leq$ este antisimetrică**, adică dacă pentru orice $a, b \in \mathbb{N}$, $a \leq b$ şi $b \leq a$, rezultă $a = b$.

O_3. **Relaţia $\leq$ este tranzitivă**, adică dacă pentru orice $a, b, c \in \mathbb{N}$ pentru care $a \leq b$ şi $b \leq c$, rezultă $a \leq c$.

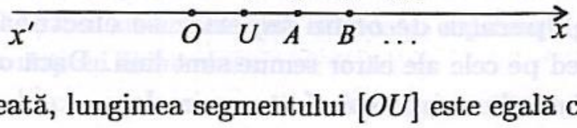
O relaţie, în cazul nostru $\leq$, care are proprietăţile O_1, O_2, O_3 se **numeşte relaţie de ordine.** Între operaţiile de adunare şi înmulţire definite pe $\mathbb{N}$ şi relaţia de ordine $\leq$ există legătura prezentată mai jos sub forma:

Monotonia adunării	dacă $a < b$, atunci $a + c < b + c$, $a, b, c \in \mathbb{N}$.
Monotonia înmulţirii	dacă $a < b$, atunci $ac < bc$, $a, b, c \in \mathbb{N}^*$.

Această legătură pusă în evidenţă între relaţia de ordine şi operaţiile de adunare şi înmulţire arată că inegalitatea numerelor naturale rămâne valabilă dacă adunăm sau înmulţim în amândouă părţile acelaşi număr.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{N}$

O dreaptă d pe care fixăm un punct O, **numit origine, un sens pozitiv şi o unitate de măsură** se numeşte **axă de coordonate.**



Sensul pozitiv este dat de săgeată, lungimea segmentului $[OU]$ este egală cu 1.

Numărului 0 îi asociem punctul O pe dreaptă. Numărului 1 îi asociem punctul U pe axă (se mai spune că 1 este coordonata sau abscisa punctului U şi scriem $U(1)$) pentru care $OU = 1$; numărului 2 îi asociem pe axă punctul A (2 este coordonata sau abscisa punctului A şi notăm $A(2)$) pentru care $OA = 2$ etc.
Să observăm că numerelor naturale le-am asociat puncte pe axa de coordonate situate la dreapta lui O (la dreapta originii O), deci aparţinând semidreptei $[Ox$ pe care din acest motiv o numim **semiaxa pozitivă**.

Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{N}$

Dacă se dau două elemente a şi b din $\mathbb{N}$ se pot formula două probleme care impun extinderea mulţimii numerelor naturale:
1) Există un element $x \in \mathbb{N}$ pentru care $a + x = b$?
2) Există un element $y \in \mathbb{N}$ pentru care $ay = b$?
Se observă că după valorile atribuite lui a şi b aceste probleme admit sau nu soluţii. De aceea s-a impus crearea altor mulţimi de numere în care aceste probleme să posede intotdeauna cel puţin o soluţie (exceptând, pentru 2) cazul $a = 0$ şi $b \neq 0$).

1.2.2. Mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z}$

Fapte de natură matematică (printre altele rezolvarea ecuaţiei $a + x = b$, $a, b \in \mathbb{N}$, $b < a$) sau fizică (temperatura) au condus la extinderea mulţimii $\mathbb{N}$ la mulţimea numerelor întregi $\mathbb{Z} = \{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.

Numere opuse. Dacă $a \in \mathbb{N}^*$, atunci am numit opusul lui a în raport cu adunarea de pe $\mathbb{N}$, numărul notat $-a$, definit prin egalităţile $\quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$
S-au creat astfel noi obiecte matematice, numerele întregi negative.

Structura algebrică a lui $\mathbb{Z}$

Este dată de un ansamblu de două operaţii, adunarea şi înmulţirea numerelor întregi, cărora le impunem să verifice condiţii similare celor satisfăcute de adunarea şi înmulţirea numerelor naturale, la care se adaugă şi altele ţinând cont de prezenţa pe lângă numerele naturale şi a opuselor acestora.
Acest principiu se va păstra şi la trecerea de la $\mathbb{Z}$ la $\mathbb{Q}$ sau de la $\mathbb{Q}$ la $\mathbb{R}$.
Adunarea şi înmulţirea pe $\mathbb{Z}$ sunt două operaţii care asociază fiecărui cuplu (a, b) de numere întregi numerele întregi notate $a + b$ şi respectiv ab.

Proprietăţile operaţiilor pe $\mathbb{Z}$

Proprietăţile operaţiilor de adunare şi înmultire valabile pe $\mathbb{N}$ se păstrează şi pe $\mathbb{Z}$, la acestea adăugându-se

A_4. **Elemente opuse.** Pentru orice $x \in \mathbb{Z}$, există elementul $(-x) \in \mathbb{Z}$, numit **opusul lui** x cu proprietatea: $\quad x + (-x) = (-x) + x = 0.$

Alte proprietăţi studiate au fost:

P_1. Dacă $a = b$, atunci $a + c = b + c$, $\quad ac = bc$.
Egalitatea este compatibilă cu adunarea şi înmulţirea.

P_2. Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $a + c = b + c$, atunci $a = b$ **(Reducerea a doi termeni asemenea).**
Dacă $a, b, c \in \mathbb{Z}$, $ac = bc$, $c \neq 0$, atunci $a = b$ **(Simplificarea printr-un număr nenul).**

P_3. **Regula semnelor la produs.** Dacă $a, b > 0$, atunci $ab > 0$; dacă $a, b < 0$, atunci $ab > 0$;
dacă $a > 0$, $b < 0$ sau $a < 0$, $b > 0$, atunci $ab < 0$;
dacă unul din factorii a, b este zero, atunci $ab = 0$.

În cazul lui $\mathbb{Z}$ diferenţa a două numere întregi este un număr întreg.

Ridicarea la putere a unui număr întreg se defineşte ca în cazul ridicării la putere a unui număr natural.

Notăm $\mathbb{Z}_- = \{\ldots, -3, -2, -1\}$ mulţimea numerelor întregi negative, iar cu $\mathbb{Z}_+ = \{0, 1, 2, \ldots\}$ mulţimea numerelor întregi nenegative.

Ordonarea numerelor întregi. Valoarea absolută a unui număr întreg

Pentru orice $a \in \mathbb{Z}$ definim **valoarea absolută** sau **modulul** lui a, numărul nenegativ

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{dacă } a \geq 0 \\ -a, & \text{dacă } a < 0. \end{cases}$$

Dacă $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$, $n_1 \neq n_2$, atunci sunt de discutat trei cazuri:

1) $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ când s-a văzut cum se face ordonarea;

2) $n_1 \in \mathbb{Z}_-$, $n_2 \in \mathbb{Z}_+$ atunci $n_1 < n_2$;

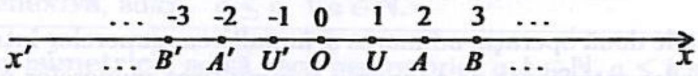
3) $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}_-$ când $n_1 < n_2$ dacă $|n_1| > |n_2|$.

Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{Z}$, care păstrează monotonia adunării, iar pentru înmulţire regula se completează astfel:

$$\boxed{\begin{array}{l} \text{dacă } a < b, \text{ atunci } ac < bc, \text{ dacă } c \in \mathbb{N}^*; \\ \text{dacă } a < b, \text{ atunci } ac > bc, \text{ dacă } c \in \mathbb{Z}_-. \end{array}}$$

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{Z}$

Am reprezentat pe axa de coordonate $x'x$ numerele naturale prin punctele O, U, A, B, ... situate pe semiaxa $[Ox$ pe care am numit-o semiaxa pozitivă.



Punctele U, A, B, ... sunt situate pe această axă la dreapta lui O.

Numărului negativ -1 îi asociem pe axă punctul U' situat la stânga lui O şi pentru care $OU' = 1$. Spunem că punctul U' are coordonata -1 şi scriem $U'(-1)$. Numărului -2 îi asociem pe axă punctul A' situat la stânga lui O, pentru care $OA' = 2$. Spunem că A' are coordonata -2 şi scriem $A'(-2)$, etc.

1.2.3. Mulţimea numerelor raţionale $\mathbb{Q}$. Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{Z}$

Ecuaţia $5x = 3$ în $\mathbb{Z}$ nu are soluţie. Se impune deci extinderea mulţimii $\mathbb{Z}$ la o altă mulţime în care ecuaţii de forma $ax = b$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a \neq 0$ să aibă soluţie. Această mulţime o reprezintă mulţimea numerelor raţionale notată cu $\mathbb{Q}$ şi definită ca fiind egală cu $\mathbb{Q} = \left\{ \frac{m}{n} \,\middle|\, m, n \in \mathbb{Z}, n \neq 0 \right\}$, unde $\frac{m}{n}$ se numeşte fracţie ($m =$ numărătorul care indică numărul de părţi, iar $n =$ numitorul care indică în câte părţi a fost împărţit întregul).

Deci un număr raţional înseamnă o fracţie $\frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. De asemenea, toate fracţiile $\left(\frac{mk}{nk}\right)_{k \in \mathbb{Z}^*}$ reprezintă acelaşi număr raţional $\frac{m}{n}$.

Două fracţii $\frac{m}{n}, \frac{p}{q}$ spunem că sunt echivalente dacă $mq = np$. Ori se constată imediat că $\frac{m}{n}$ este echivalentă cu orice fracţie $\frac{mk}{nk}$.

Deci două fracţii echivalente dau acelaşi număr raţional.

Exemple. Toate fracţiile $\left(\frac{3}{5}, \frac{6}{10}, \frac{9}{15}, \dots\right)$ obţinute prin amplificare sau simplificare, care reprezintă aceeaşi cantitate, reprezintă **numărul raţional unic** $\frac{3}{5}$.

Fracţiile cu numitorul 1 şi cele obţinute prin amplificarea lor sunt conţinute tot în mulţimea numerelor raţionale. De exemplu: $\frac{2}{1} = \frac{4}{2} = \frac{6}{3} = \dots$ Ele pot fi substituite una alteia. Numărul întreg 0 poate fi înlocuit cu orice fracţie cu numărătorul egal cu zero. **Numitorul zero este exclus.**

Probleme rezolvate

1. **Să se determine $n \in \mathbb{Z}$ pentru ca fracţiile $\frac{2+n}{6+2n}$ şi $\frac{3}{4}$ să fie echivalente.**

R. Trebuie să avem egalitatea $4(2+n) = 3(6+2n)$. De aici $n = -5$.

2. **Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.**

R. Presupunem că $(m,n) = 1$. Din $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$ rezultă $m^2 = 3n^2$, $(*)$. Cum $(m,n) = 1$ se obţine $3 \mid m^2 \Rightarrow 3 \mid m$. Fie $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbb{Z}$. Egalitatea $(*)$ devine $3m_1^2 = n^2$, $(**)$, iar de aici $3 \mid n^2$ şi deci $3 \mid n$, adică există $n_1 \in \mathbb{Z}$ astfel încât $n = 3n_1$. Am obţinut că $3 \mid m$, $3 \mid n$, adică $3 \mid (m,n) = 1$, contradicţie. Deci nu există $\frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ cu $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 3$.

3. **Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{5}{2k-1} \in \mathbb{Z}$.**

R. Fracţia este număr întreg dacă $2k-1$ divide 5, adică dacă $2k-1 \in \{-1, 1, -5, 5\}$. De aici $k \in \{0, 1, -2, 3\}$.

4. **Dacă $\frac{3}{7} = 0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, atunci precizaţi a_{2009}.**

R. Observăm că $\frac{3}{7} = 0,(42857)$ şi din $a_1 = 4$, $a_2 = 2$, $a_3 = 8$, $a_4 = 5$, $a_5 = 7$, iar $2009 = 401 \cdot 5 + 4$, deci $a_{2009} = a_4 = 5$.

Probleme propuse

1. **Găsiţi trei valori ale lui $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care fracţia $\frac{3n}{8}$ este reductibilă.**
2. **Determinaţi $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţiile $\frac{2+k}{3}$ şi $\frac{4+k}{5}$ sunt echivalente.**
3. **Arătaţi că nu există numere raţionale $\frac{m}{n}$ astfel încât $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 5$.**
4. **Să se determine $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât $\frac{3}{2k+1} \in \mathbb{Z}$.**
5. **Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ pentru care fracţia $\frac{10}{k+1}$ este reductibilă.**
6. **Determinaţi trei valori ale lui $k \in \mathbb{Z}$ astfel încât fracţia $\frac{2k+1}{3k+2}$ să fie ireductibilă.**
7. **Dacă $\frac{2}{7} = 0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, să se precizeze a_{2010}.**
8. **Dacă $a, b, c, d \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$.**
9. **Dacă $a, b, c, d, e, f \in \mathbb{N}^*$ astfel încât $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} < \frac{e}{f}$, atunci să se arate că $\frac{a}{b} < \frac{a+c+e}{b+d+f} < \frac{e}{f}$.**

10*. **Dacă $a \in \mathbb{N}^*$ atunci $\frac{a}{a+1} < \frac{a+1}{a+2} < \frac{a+2}{a+3}$. Să se arate că $\frac{1}{2} \cdot \frac{4}{5} \cdot \frac{7}{8} \cdot \ldots \cdot \frac{2005}{2006} \cdot \frac{2008}{2009} < \frac{1}{12}$.**

Indicaţie. Fie P produsul. Atunci $\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\ldots\cdot\frac{2007}{2008}\cdot\frac{2008}{2009}=\frac{1}{2009}$, $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}<\frac{5}{6}<\frac{6}{7}$, $\ldots$, $\frac{2005}{2006}<\frac{2006}{2007}<\frac{2007}{2008}\Rightarrow P^3<\frac{1}{2009}$; $\frac{2008}{2009}<1$.

Reprezentarea unui număr raţional

Un număr raţional se poate reprezenta sub două forme: 1) **sub formă de fracţie ordinară** $\left(\frac{m}{n}\right)$ sau 2) **sub formă de fracţie zecimală (finită sau infinită periodică)**. Reamintim procedeul de trecere de la o formă la alta.

Cazuri particulare. Fie $q_1=\frac{1}{2}$, $q_2=\frac{1}{3}$, $q_3=\frac{19}{55}$.

Vom trece de la forma de fracţie ordinară la cea de fracţie zecimală aplicând algoritmul de împărţire şi obţinem

$q_1=0,5,\quad q_2=0,33\ldots3\ldots,\quad q_3=0,3454545\ldots$

sau scrise utilizând perioada astfel

$q_1=0,5,\quad q_2=0,(3),\quad q_3=0,3(45).$

Fracţiile zecimale obţinute în urma împărţirii se numesc **reprezentările zecimale** ale numerelor raţionale q_1, q_2 şi respectiv q_3.

Fracţia q_1 are reprezentarea zecimală finită, având după virgulă un număr finit de cifre semnificative, iar în rest zerouri. Fracţia q_2 are reprezentare zecimală periodică simplă, deoarece perioada (3) urmează imediat după virgulă, iar fracţia q_3 are reprezentarea zecimală periodică mixtă, deoarece perioada (45) nu urmează imediat după virgulă (are după virgulă o parte neperiodică – aici 3).

Acum pentru a trece de la fracţiile zecimale la cele ordinare se procedează aşa cum s-a văzut în gimnaziu astfel:

$q_1=0,5=0+\frac{5}{10}=\frac{1}{2},\qquad q_2=0,(3)=\frac{3}{9}=\frac{1}{3},\qquad q_3=0,3(45)=\frac{345-3}{990}=\frac{342}{990}=\frac{19}{55}.$

De fapt, ultimele scrieri au următoarea argumentaţie: $10q_2=3,(3)$ sau $10q_2-q_2=3\Leftrightarrow 9q_2=3\Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow q_2=1/3$ şi respectiv $10q_3=3,(45)$, unde notăm $x=3,(45)$ şi avem $100x=345,(45)$, iar de aici prin scădere $100x-x=342\Leftrightarrow 99x=342\Leftrightarrow q_3=\frac{19}{55}$.

Cazul general. O fracţie zecimală finită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$, unde $a_k,a_{k-1},\ldots,a_1,a_0,a_{-1},\ldots,a_{-p}$ sunt cifre şi este egală în baza zece cu:

$a=a_k\cdot10^k+a_{k-1}\cdot10^{k-1}+\ldots+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots+\frac{a_{-p}}{10^p}.$

O fracţie zecimală infinită are forma:

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}a_{-2}\ldots$, şi este egală în baza zece cu

$a=a_k\cdot10^k+\cdot+a_1\cdot10+a_0+\frac{a_{-1}}{10}+\frac{a_{-2}}{10^2}+\ldots$

Observaţie. O fracţie zecimală finită poate fi considerată ca o fracţie zecimală infinită prin adăugare de zerouri.

O fracţie zecimală infinită periodică simplă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,(a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p})$, şi reprezintă numărul raţional

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0+\frac{a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}}{\underbrace{99\ldots9}_{p}}$, unde grupul de cifre $a_{-1}a_{-2}\ldots a_{-p}$ se numeşte **perioadă**.

O fracţie zecimală infinită periodică mixtă are forma

$a=a_ka_{k-1}\ldots a_1a_0,a_{-1}\ldots a_{-i}(b_1\ldots b_p)$, şi reprezintă numărul raţional

$$a = a_k \dots a_1 a_0 + \frac{a_{-1} \dots a_{-i} b_1 \dots b_p - a_{-1} \dots a_{-i}}{\underbrace{99\dots9}_{p}\underbrace{0\dots0}_{i}}$$

Observaţie. Orice fracţie zecimală finită este periodică de perioadă zero.
Avem şi rezultatul reciproc sub forma:

Teorema. Orice număr raţional se reprezintă în mod unic sub forma unei fracţii zecimale finite sau fracţii zecimale infinite periodice cu perioada diferită de 9.

Observaţie. În teoremă apare restricţia ca fracţia zecimală infinită periodică să nu aibă perioada 9. Dacă prin absurd fracţia $\frac{m}{n}$, $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N}^*$ ar avea perioada 9, atunci efectuând împărţirea cu rest a lui m cu n se ajunge la un rest r, care înmulţit cu 10 şi împărţit la n dă câtul 9 şi din nou restul r, adică $10r = 9n + r$. De aici $r = n$, în contradicţie cu cerinţa $r < n$.

Probleme rezolvate

1. Să se determine cifrele a, b astfel încât $0,a(b) = \frac{a}{b}$.

R. Egalitatea se rescrie $\frac{\overline{ab} - a}{90} = \frac{a}{b}$ sau $\frac{10a + b - a}{90} = \frac{a}{b}$ sau $b(9a + b) = 90a$. Găsim $a = 1$, $b = 6$.

2. Fie $0,a_1a_2\dots$ scrierea zecimală a numărului $\frac{1}{7}$. Să se calculeze a_{2009} şi suma

$S = a_1 + a_2 + \ldots + a_{2009}$.

R. Avem $\frac{1}{7} = 0,(142857)$, $2009 = 6 \cdot 334 + 5$, $a_1 = 1$; $a_2 = 4$, $a_3 = 2$ .... De aici $a_{2009} = a_5$, iar $S = 334(1 + 4 + 2 + 8 + 5 + 7) + 1 + 4 + 2 + 8 + 5 = 9039$.

3. Să se arate că $n + \frac{4}{10} < \sqrt{n^2 + n} < n + \frac{5}{10}$, $n \in \mathbb{N}^*$ şi apoi să se deducă prima zecimală a lui $\sqrt{n^2 + n}$.

R. Inegalitatea se ridică la pătrat şi se oţine echivalent ($4 < 5n$ şi $0 < 1/4$) adevărate. Deci $n,4 < \sqrt{n^2 + n} < n,5$, adică prima zecimală a numărului $\sqrt{n^2 + n}$ este 4.

4. Să se arate că: 1) fracţia $\frac{n^2 + n + 2}{n^2 - n + 4}$ este reductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$;

2) fracţia $\frac{2n + 1}{3n + 2}$ este ireductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

R. 1) O fracţie este reductibilă dacă atât numărătorul, cât şi numitorul se divid prin acelaşi număr $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$. Observăm că $n^2 + n + 2 = n(n + 1) + 2$, $n^2 - n + 4 = n(n - 1) + 4$ sunt numere pare, deoarece produsul a două numere naturale consecutive se divide prin 2, iar suma de numere pare este un număr par.

2) Procedăm prin reducere la absurd. Fie deci $d \in \mathbb{N}$, $d > 1$, un divizor atât al numărătorului, cât şi al numitorului. Deci, $d \mid 2n + 1$, $d \mid 3n + 2$. De aici $d \mid 3(2n + 1) - 2(3n + 2) = 1 \Rightarrow d = 1$, contradicţie. Prin urmare, fracţia este ireductibilă.

5. Să se arate că $1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \dots + \frac{1}{(2n + 1)^2} < \frac{5}{4}$.

R. Să observăm că $(2k + 1)^2 > 2k(2k + 2)$ şi deci $\frac{1}{(2k + 1)^2} < \frac{1}{2k(2k + 2)} = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k + 1}\right)$. Adunând aceste inegalităţi pentru $k = \overline{1,n}$ rezultă

$$1 + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{(2n + 1)^2} < 1 + \frac{1}{4}\left(\frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n + 1}\right) = \frac{5}{4} - \frac{1}{4(n + 1)} < \frac{5}{4}.$$

Probleme propuse

1. Dacă $\frac{4}{7} = 0, a_1a_2 \dots a_n \dots$, atunci să se calculeze a_{2012}.

2. Să se arate că: 1) fracţia $\frac{n^2 - n - 8}{n^2 + n - 2}$ este reductibilă $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $n \geq 2$; 2) fracţia $\frac{n+3}{2n+5}$ este ireductibilă $\forall n \in \mathbb{N}$.

3. Să se determine $x, y \in \mathbb{Z}$ pentru care $xy + x + y = 3$.

Indicaţie. $(x+1)(y+1) = 4$.

4. Arătaţi că pentru oricare cinci numere întregi există cel puţin două care dau acelaşi rest la împărţirea cu 4.

Indicaţie. Resturile la împărţirea prin 4 sunt 0, 1, 2, 3.

5. Să se rezolve în $\mathbb{N}$ ecuaţia $0, x(y) + 0, y(x) = 0, (3)$.

R. $(x, y) \in \{(1,2), (2,1)\}$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr

Definiţii. Fie $a \in \mathbb{Q}$. Se numeşte **partea întreagă a numărului** a, numărul, notat $[a]$, care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.

Deci $\quad [a] \in \mathbb{Z}, [a] \leq a < [a] + 1$.

Se numeşte **partea fracţionară a numărului** a, numărul, notat $\{a\}$, care este egal cu diferenţa dintre a şi partea sa întreagă $[a]$.

Deci $\quad \{a\} = a - [a]$.

Trebuie observat că există o infinitate de numere întregi mai mici sau egale cu a. Partea întreagă a lui a, $[a]$, este cel mai mare dintre toţi întregii mai mici sau egali cu a.

Din $[a] \leq a < [a] + 1$ rezultă $\{a\} = a - [a] \geq 0$ şi $\{a\} = a - [a] < 1$.

Deci partea fracţionară a lui a este un număr pozitiv subunitar, $\quad 0 \leq \{a\} < 1$.

Exemple. 1) $[3,76] = 3$, $\{3,76\} = 3,76 - [3,76] = 3,76 - 3 = 0,76$;

2) $[9] = 9$, $\{9\} = 9 - [9] = 9 - 9 = 0$;

3) $[-3,16] = -4$, $\{-3,16\} = -3,16 - [-3,16] = -3,16 + 4 = 4 - 3 - 0,16 = 1 - 0,16 = 0,84$;

4) $[-5] = -5$, $\{-5\} = -5 - [-5] = -5 + 5 = 0$.

Structura algebrică a lui $\mathbb{Q}$

Pe mulţimea $\mathbb{Q}$ s-au definit operaţiile de adunare şi înmulţire a fracţiilor ordinare astfel

$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$ şi $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}$, $\forall \frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$.

Cele două operaţii se bucură de proprietăţile prezentate la mulţimea $\mathbb{Z}$.

În plus pentru orice $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $a, b \neq 0$, există elementul (fracţia) $\frac{b}{a} \in \mathbb{Q}$ pentru care $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a} = 1$, ceea ce înseamnă că orice fracţie nenulă $\frac{a}{b}$ are o inversă $\frac{b}{a}$.

Ordonarea numerelor raţionale

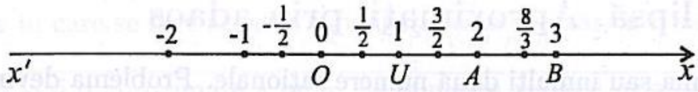
Dacă $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}_+^*$ $\left(= \left\{\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{N}^*\right\} = \text{numerele raţionale pozitive nenule}\right)$, $a, b, c, d > 0$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad < bc$.

Dacă $\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}^*_-$ $\left(= \left\{-\frac{a}{b};\ a, b \in \mathbb{N}^*\right\}\right.$ = numere raţionale negative nenule), $\frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*_+$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$, iar dacă $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}^*_-$, atunci $\frac{a}{b} < \frac{c}{d}$ dacă $\left|\frac{a}{b}\right| > \left|\frac{c}{d}\right|$.

Observaţie. Între două numere raţionale distincte există o infinitate de numere raţionale. Fie $a, b \in \mathbb{Q}$, $a < b$. Atunci $a < \frac{a+b}{2} < b$ şi se repetă procedeul pentru a, $\frac{a+b}{2}$ sau $\frac{a+b}{2}$, b.

Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{Q}$

Reprezentarea pe axa de coordonate a unui număr raţional se obţine prin reprezentarea unei singure fracţii din mulţimea care reprezintă numărul raţional.



Imaginile numerelor raţionale pozitive sunt situate pe axa de coordonate la dreapta lui O, iar imaginile numerelor raţionale negative sunt plasate pe axă la stânga lui O.

De exemplu pentru a reprezenta pe axă numărul raţional $\frac{8}{3}$ observăm că acesta se scrie sub forma $2 + \frac{2}{3} \in [2, 3]$. Unitatea cuprinsă între 2 şi 3 (pe figură segmentul AB) se divide în 3 părţi egale (cât indică numitorul fracţiei $\frac{2}{3}$) şi punctul căutat este al doilea punct al diviziunii (cât indică numărătorul fracţiei $\frac{2}{3}$).

Dacă numerele raţionale se prezintă sub formă de fracţii zecimale, acestea se vor transforma în fracţii ordinare şi imaginile lor pe axă se obţin aşa cum s-a văzut în cazul particular al fracţiei $\frac{8}{3}$.

1.2.4. Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$. Necesitatea extinderii mulţimii $\mathbb{Q}$

Am prezentat succesiv mulţimile $\mathbb{Z}$ (a numerelor întregi), $\mathbb{Q}$ (a numerelor raţionale) ca fiind „îmbogăţiri" ale structurii $(\mathbb{N}, +, \cdot)$, a cărei structură „săracă" a apărut în urma rezolvării ecuaţiilor de tipul $ax + b = c$. Această realizare nu este completă căci rămân destule lacune de completat.

De exemplu, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţii în $\mathbb{Q}$, ceea ce revine la a spune că $\sqrt{2}$ nu este raţional.

Într-adevăr, dacă prin absurd ar exista un număr raţional $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*$, $(m, n) = 1$ (altfel, se simplifică fracţia) pentru care $\left(\frac{m}{n}\right)^2 = 2$ ar rezulta $m^2 = 2n^2$. De aici $2 \,|\, m^2$, adică $2 \,|\, m$. Deci $m = 2m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}^*$. Din $m^2 = 2n^2$ şi $m = 2m_1$ rezultă $2m_1^2 = n^2$, adică $2 | n$. Aşadar există $n_1 \in \mathbb{N}^*$ pentru care $n = 2n_1$. Recapitulând: $m = 2m_1$, $n = 2n_1$, $m_1, n_1 \in \mathbb{N}^*$, ceea ce arată că $2 \,|\, m$, $2 \,|\, n$, în contradicţie cu $(m, n) = 1$. În concluzie, ecuaţia $x^2 = 2$ nu are soluţie raţională (pozitivă; analog se procedează pentru x raţional negativ).

Definiţia unui număr real. Reprezentarea unui număr real

Am văzut că un număr raţional se poate prezenta sub una din formele:

1) fracţie ordinară $\frac{a}{b}$, $a, b \in \mathbb{Z}$, $b \neq 0$;

2) fracţie zecimală finită sau infinită periodică (simplă sau mixtă).

Există însă numere care nu sunt raţionale:

1) $\sqrt{2}$ (s-a arătat mai sus), $\sqrt{3}, \sqrt{5}, \ldots$

2) $0,123456789101112\ldots$; $3,31323334\ldots$; $1,1010010001\ldots$

Numerele de la 1) nu pot fi puse sub formă de fracţie ordinară, iar cele de la 2) sunt fracţii zecimale infinite neperiodice. Aceste numere le numim iraţionale. Deci

Un număr iraţional este o fracţie zecimală infinită şi neperiodică.

Mulţimea numerelor reale, notată $\mathbb{R}$, este reuniunea dintre mulţimea numerelor raţionale şi mulţimea numerelor iraţionale.

Un număr real este o fracţie zecimală finită sau infinită.

Mulţimea numerelor iraţionale este $\mathbb{R} - \mathbb{Q}$.

Se cunoaşte că raportul dintre lungimea cercului şi diametrul său este egal cu $\pi = 3,141592\ldots$ care este, de asemenea, un număr iraţional.

Aproximaţii prin lipsă. Aproximaţii prin adaos

Am văzut cum se pot aduna sau înmulţi două numere raţionale. Problema devine imposibilă dacă acceptăm reguli asemănătoare pentru numerele reale, dat fiind faptul că un număr real nu-l putem descrie în întregime prin toate zecimalele sale în cazul numerelor iraţionale.

În practică pentru determinarea unor elemente (din matematică, fizică, chimie etc.) se ajunge la valori egale cu $\sqrt{2}$ sau $\sqrt{3}$ etc. pe care însă, aşa cum s-a văzut în clasele anterioare, le aproximăm prin lipsă sau adaos. Aşa de pildă pentru $\sqrt{2}$ considerăm valoarea 1,4 sau 1,41; pentru $\sqrt{3}$ luăm 1,7 sau 1,73. În aceste cazuri scriem $\sqrt{2} \approx 1,4$ sau $\sqrt{2} \approx 1,41$ etc.

Definiţie. (Aproximare prin lipsă.) Numărul raţional rezultat prin eliminarea tuturor zecimalelor unui număr real pozitiv, începând de la o zecimală oarecare spre dreapta, se numeşte **aproximare prin lipsă** (sau **trunchiere**) a numărului.

Aproximare prin adaos. Numărul raţional rezultat dintr-o aproximare prin lipsă, căruia i se măreşte cu unu ultima cifră se numeşte **aproximare prin adaos** a numărului.

Pentru a obţine aproximările prin lipsă şi adaos ale unui număr negativ a, se determină aproximările prin lipsă şi prin adaos ale numărului $|a|$.

Fie acestea a_l şi respectiv a_a. Deci $a_l < |a| < a_a$. Prin urmare $a_l < -a < a_a$ (dacă $a < 0$) sau $-a_a < a < -a_l$, ceea ce arată că $-a_a$ este aproximarea prin lipsă a lui a, iar $-a_l$ devine aproximare prin adaos a lui a.

Exemple. 1) Fie $a = 10,5249$. Atunci:

– aproximările prin lipsă ale lui a sunt: 10; 10,5; 10,52; 10,524;

– aproximările prin adaos ale lui a sunt: 11; 10,6; 10,53; 10,525.

Să observăm că aceste aproximări conduc la o ordonare a lor faţă de numărul considerat

$$\underbrace{10 < 10,5 < 10,52 < 10,524}_{\text{aproximări prin lipsă}} < a < \underbrace{10,525 < 10,53 < 10,6 < 11}_{\text{aproximări prin adaos}}.$$

Observăm că aproximările (prin lipsă sau adaos) ale unui număr sunt mai apropiate de numărul aproximat, cu cât se consideră mai multe zecimale.

2) Fie $a = -3,45613$. În acest caz luăm $a = 3,45613$.

Avem mai jos aproximări pentru $|a|$

$$\underbrace{3 < 3,4 < 3,45 < 3,456}_{\text{aproximările prin lipsă}} < |a| < \underbrace{3,457 < 3,46 < 3,5 < 4}_{\text{aproximările prin adaos}},$$

iar de aici se obţin aproximări pentru a (înmulţind lanţul de inegalităţi cu -1):

$$\underbrace{-4 < -3,5 < -3,46 < -3,457}_{\text{aproximări prin lipsă}} < a < \underbrace{-3,456 < -3,45 < -3,4 < -3}_{\text{aproximări prin adaos}}.$$

Fie acum cazul general al unui număr real $a = a_0, a_1a_2\ldots$

Dacă din descrierea sub formă de fracţie zecimală infinită a unui număr reţinem n zecimale, atunci spunem că aproximarea (prin lipsă) este cu n zecimale exacte sau încă de ordin n. Deci $a_{l_n} = a_0, a_1a_2\ldots a_n$, caz în care aproximarea prin adaos de ordin n a numărului a este $a_{a_n} = a_{l_n} + 10^{-n}$.

Evident au loc inegalităţile:

$a_{l_1} < a_{l_2} < \ldots < a_{l_n} < \ldots < a < \ldots a_{a_n} < \ldots < a_{a_2} < a_{a_1}$.

De obicei atunci când facem aproximarea unui număr real a cu o valoare $\widetilde{a}$ ne interesează eroarea pe care o comitem. Mai precis cât de depărtat este $\widetilde{a}$ de a.

Pentru precizia calculelor în care se face această substituţie este necesar ca $\widetilde{a}$ să fie cât mai aproape de a.

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$ şi $\widetilde{a}$ o aproximare a lui a. Se numeşte **eroare absolută asociată aproximării** $\widetilde{a}$ numărul $\Delta_{\widetilde{a}} = |a - \widetilde{a}|$.

Cu cât eroarea absolută a unei aproximări $\widetilde{a}$ este mai mică, cu atât se spune că aproximarea este mai bună.

Exemplu. Dacă $a = \sqrt{2} = 1,4142\ldots$, iar $\widetilde{a} = 1,414$, atunci $\Delta_{\widetilde{a}} = a - \widetilde{a} = 0,0002\ldots$.

Legat de noţiunile de aproximare prin lipsă şi prin adaos pentru un număr este noţiunea de **rotunjire de un anumit ordin n a acelui număr.**

Dacă prima cifră eliminată este strict mai mică decât 5, atunci rotunjirea numărului este egală cu aproximarea prin lipsă. Dacă prima cifră eliminată este mai mare sau egală cu 5, atunci rotunjirea numărului este egală cu aproximarea prin adaos.

Exemplu. Fie $a = 3,65183$. Numărul 4 reprezintă o rotunjire a lui a la ordinul unităţilor. Numărul 3,7 reprezintă o rotunjire a lui a de ordinul zecimilor. Numărul 3,66 este o rotunjire a lui a la ordinul sutimilor, iar 3,652 este o rotunjire a lui a la ordinul miimilor.

Ordonarea numerelor reale

Definiţie. Egalitatea a două numere reale. Fie $a, b \in \mathbb{R}$. Spunem că numerele a, b **sunt egale** şi scriem $a = b$ dacă au acelaşi semn şi se reprezintă prin aceeaşi fracţie zecimală.

Fie $a, b \in \mathbb{R}$, numere reale pozitive

$a = a_1a_2\ldots a_n, a_{-1}a_{-2}\ldots$, $\quad b = b_1b_2\ldots b_m, b_{-1}b_{-2}\ldots$,

unde a_i, $i = \overline{1,n}$, b_j, $j = \overline{1,m}$, $a_{-1}, a_{-2}, \ldots, b_{-1}, b_{-2}, \ldots$ sunt cifre de la 0 la 9.

Spunem că numărul a **este strict mai mic decât** b şi scriem $a < b$ dacă:

$a_1a_2\ldots a_n < b_1b_2\ldots b_m$ sau $a_1a_2\ldots a_n = b_1b_2\ldots b_m$ şi există $n \in \mathbb{N}^*$ pentru care $a_{-n} < b_{-n}$ şi $a_{-k} = b_{-k}$, pentru orice $k < n$.

Orice număr real negativ este strict mai mic decât orice număr real pozitiv.

Un număr real negativ a este strict mai mic decât un număr real negativ b dacă $|b| < |a|$.

Spunem că a este mai mic sau egal cu b şi scriem $a \leq b$ dacă $a < b$ sau $a = b$.

Exemple. 1) $3,591 < 9,111$ deoarece $3 < 9$;

2) $215,368 < 215,369$ deoarece

2	1	5	,	3	6	8
2	1	5	,	3	6	9

cifrele de pe aceleaşi poziţii sunt egale până la a treia zecimală.

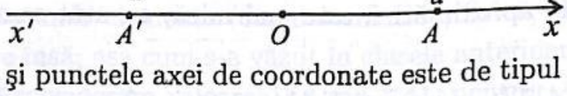
Mulţimea numerelor reale se bucură de o proprietate deosebit de importantă

> Între orice două numere reale există cel puţin un număr raţional şi cel puţin un număr iraţional.

Relaţia $\leq$ este o relaţie de ordine pe $\mathbb{R}$.

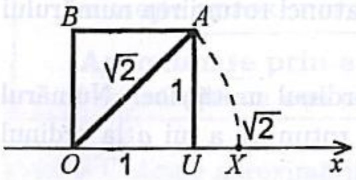
Reprezentarea geometrică a lui $\mathbb{R}$

Fiecărui număr real pozitiv a îi corespunde pe axa de coordonate un punct A situat la dreapta lui O astfel încât $OA = a$, iar fiecărui număr real negativ a' îi corespunde un punct A' situat la stânga lui O pentru care $OA' = |a'|$.



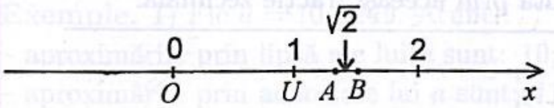
Această corespondenţă între $\mathbb{R}$ şi punctele axei de coordonate este de tipul „unu la unu". Din acest motiv axa de coordonate se numeşte şi **axa reală**.

Există modalităţi de construcţie cu rigla şi compasul a unor puncte pe axa reală cărora le corespund anumite numere reale. Vom ilustra aici construcţia punctului căruia îi corespunde $\sqrt{2}$.



Se construieşte pătratul de latură $[OU]$, $OUAB$, a cărui diagonală este egală cu $OA = \sqrt{OU^2 + UA^2} = \sqrt{2}$. Acum cu ajutorul compasului cu vârful în O şi deschiderea OA se descrie arcul de cerc ce intersectează axa reală în punctul X pentru care $OX = \sqrt{2}$. Dacă purtăm acest segment la dreapta lui X o dată, de două ori, etc se obţin puncte care corespund numerelor $2\sqrt{2}$, $3\sqrt{2}$, etc. Analog purtând segmentul $[OX]$ la stânga lui O, o dată, de două ori, etc. se obţin puncte ce corespund numerelor $-\sqrt{2}$, $-2\sqrt{2}$, etc.

Pentru a reprezenta pe axă un număr iraţional utilizăm aproximările sale zecimale. Aşa, de exemplu, pentru a reprezenta pe $\sqrt{2}$ pe axă utilizăm faptul că $1,4 < \sqrt{2} < 1,5$ şi deci lui îi va corespunde un punct pe axă situat între punctele $A(1,4)$ şi $B(1,5)$.



Se ştie că dacă $A(x_A)$ şi $B(x_B)$, atunci distanţa dintre A şi B sau lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $AB = |x_B - x_A|$.

Probleme rezolvate

1. Să se arate că $\forall x > 0$, $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$. Când are loc egalitatea?

R. Înmulţim cu $x > 0$ inegalitatea şi avem scrierea echivalentă $x^2 - 2x + 1 \geq 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geq 0$, adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$.

2. Să se arate că $\dfrac{a^2+b^2}{a+b} \geq \sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}} \geq \dfrac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \dfrac{2ab}{a+b}$, $\forall a, b > 0$. Avem egalitate în inegalităţi dacă $a = b$.

R. Pentru demonstrarea fiecărei inegalităţi se ridică la pătrat. Pentru prima avem $\left(\dfrac{a^2+b^2}{a+b}\right)^2 \geq \dfrac{a^2+b^2}{2} \Leftrightarrow \dfrac{a^2+b^2}{(a+b)^2} \geq \dfrac{1}{2} \Leftrightarrow (a-b)^2 \geq 0$, evident. Analog pentru celelalte inegalităţi.

3. Să se arate că $\frac{a^2}{a-1} \geq 4$, $\forall a > 1$ şi să se deducă inegalitatea $\frac{a^2}{a-1} + \frac{b^2}{b-1} \geq 8$, $\forall a, b > 1$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $a^2 \geq 4(a-1) \Leftrightarrow (a-2)^2 \geq 0$, evident. Avem egalitate dacă $a = 2$. Pentru a doua inegalitate se aplică cea demonstrată pentru fiecare fracţie şi apoi se adună. Egalitatea se realizează dacă $a = b = 2$.

4. Arătaţi că $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$, $\forall a, b > 0$ şi apoi demonstraţi că $\frac{a^2+b^2}{a+b} + \frac{b^2+c^2}{b+c} + \frac{c^2+a^2}{c+a} \geq a+b+c$, $\forall a, b, c > 0$.

R. Prima inegalitate se obţine din problema 2; avem egalitate dacă $a = b$. Pentru a doua inegalitate se aplică prima inegalitate pentru fiecare fracţie şi apoi se adună.

5. Să se arate că $\sqrt{x} \leq \frac{x+1}{2}$, $\forall x \geq 0$, cu egalitate în inegalitate dacă $x = 1$. Să se demonstreze inegalităţile:

1) $a\sqrt{b-1} + b\sqrt{a-1} \leq ab$, $\forall a, b \geq 1$; 2) $\sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} \leq 2$, $\forall a, b \geq \frac{1}{4}$, $a+b=1$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $(\sqrt{x}-1)^2 \geq 0$, adevărată. Avem egalitate în inegalitate dacă $\sqrt{x} = 1 \Leftrightarrow x = 1$.

1) Conform inegalităţii demonstrate avem: $\sqrt{b-1} \leq \frac{b-1+1}{2} = \frac{b}{2}$, $\sqrt{a-1} \leq \frac{a}{2}$ şi deci membrul stâng se majorează cu $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$. Avem egalitate dacă $a = b = 2$.

2) Pentru $x = 4a-1$ avem $\sqrt{4a-1} \leq \frac{4a-1+1}{2} = 2a$. Analog $\sqrt{4b-1} \leq 2b$. Deci $\sqrt{4a-1} + \sqrt{4b-1} \leq$ $\leq 2(a+b) = 2 \cdot 1 = 2$, cu egalitate în inegalitate dacă $4a-1 = 1 = 4b-1 \Leftrightarrow a = b = \frac{1}{2}$.

Probleme propuse

1. Dacă $a, b \geq 0$, atunci: 1) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{(a+1)(b+1)}$; 2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} \leq \sqrt{2(a+b)}$.

2. Dacă $a, b \in [0,1]$ sau $a, b \in [1, \infty)$, atunci:
1) $\sqrt{2(a+b)} < \sqrt{(a+1)(b+1)}$; 2) $\sqrt{a} + \sqrt{b} < \sqrt{ab} + 1$.

3. Dacă $a, b \in \mathbb{R}$, avem $\sqrt{a^2+b^2} \geq \frac{|a|+|b|}{\sqrt{2}}$. Arătaţi că:

1) $\sqrt{a^2+(1-a)^2} + \sqrt{b^2+(1-b)^2} + \sqrt{c^2+(1-c)^2} \geq \frac{3\sqrt{2}}{2}$;

2) $\sqrt{(1-a)^2+(1+b)^2} + \sqrt{(1-b)^2+(1+c)^2} + \sqrt{(1-c)^2+(1+a)^2} \geq 3\sqrt{2}$.

4. Dacă $x, y \geq 0$, atunci $\sqrt{x^2+xy+y^2} \geq \frac{\sqrt{3}}{2}(x+y)$ şi deduceţi că dacă $x, y, z \geq 0$, atunci:
$\sqrt{x^2+xy+y^2} + \sqrt{y^2+yz+z^2} + \sqrt{z^2+zx+x^2} \geq \sqrt{3}(x+y+z)$.

5. Dacă $x, y > 0$, iar $a, b \in \mathbb{R}$, atunci $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} \geq \frac{(a+b)^2}{x+y}$, cu egalitate dacă $\frac{a}{x} = \frac{b}{y}$. Deduceţi inegalitatea $\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geq \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$, unde $x, y, z > 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$, cu egalitate dacă $\frac{a}{x} = \frac{b}{y} = \frac{c}{z}$. Demonstraţi că dacă $a, b, c > 0$, atunci: $\frac{a^2}{b+c} + \frac{b^2}{c+a} + \frac{c^2}{a+b} \geq \frac{a+b+c}{2}$.

6. Arătaţi că dacă $a, b > 0$, atunci $\frac{a^2+b^2}{a+b} \geq \frac{a+b}{2}$, cu egalitate dacă $a = b$ şi apoi demonstraţi inegalităţile: 1) $\frac{x^2}{y} + \frac{y^2}{z} + \frac{z^2}{x} \geq 1$, $\forall x, y, z > 0$, $x+y+z = 1$;

2) $\frac{a^4+b^4}{a^2+b^2} + \frac{b^4+c^4}{b^2+c^2} + \frac{c^4+a^4}{c^2+a^2} \geq ab+bc+ca$, $\forall a, b, c > 0$;

3) $\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(c+a)}+\frac{1}{c^3(a+b)}\geq\frac{3}{2}$, unde $a,b,c>0$, $abc=1$.

Indicaţie. $\frac{1}{a^3(b+c)}=\frac{b^2c^2}{ab+ac}$ şi se aplică 5.

7. Dacă $x,y,z\geq 0$, atunci $x+y+z\leq\sqrt{3(x^2+y^2+z^2)}$ şi deduceţi că dacă $a,b,c,d>0$, atunci au loc inegalităţile:

1) $\sqrt{b^2+c^2+d^2}+\sqrt{a^2+c^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2+d^2}+\sqrt{a^2+b^2+c^2}\geq\sqrt{3}(a+b+c+d)$.

2) $\frac{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}{d}+\frac{\sqrt{b^2+c^2+d^2}}{a}+\frac{\sqrt{c^2+d^2+a^2}}{b}+\frac{\sqrt{d^2+a^2+b^2}}{c}\geq 4\sqrt{3}$.

Indicaţie. Se înmulţeşte fiecare inegalitate cu $\sqrt{3}$.

8. 1) Demonstraţi inegalitatea $\frac{a^n}{b^m}\geq\frac{na^{n-m}-mb^{n-m}}{n-m}$, $n,m\in\mathbb{N}^*$, $n>m$, $a,b>0$, pentru $n=2$, $m=1$ şi $n=3$, $m=1$.

2) Demonstraţi inegalitatea $a^n+b^n\geq a^{n-k}b^k+a^kb^{n-k}$, $1\leq k\leq n$, $a,b>0$, pentru $n=2$, $k=1$ şi pentru $n=3$, $k=1$.

Operaţii cu numere reale

Adunarea

Demersurile făcute mai sus de a aproxima un număr real printr-un număr raţional scris sub forma unei fracţii zecimale finite ne vor permite să definim suma a două numere reale. Într-un fel acest demers este justificat deoarece $\mathbb{Q}$ este inclusă în $\mathbb{R}$ şi în cazul particular al sumei a două numere raţionale, ar trebui să regăsim suma lor aşa cum a fost descrisă la adunarea numerelor raţionale.

Pentru aceasta precizăm câteva elemente.

> **Definiţie.** Se numeşte **sumă inferioară a două numere reale** suma a două aproximări prin lipsă a lor.
> Se numeşte **sumă superioară a două numere reale** suma a două aproximări prin adaos a lor.

Exemplu. Fie $a=12,3(5)$, $b=1,4325$. Pentru aceste numere avem aproximările:

$12<12,3<12,35<12,355<\ldots<a<12,356<12,36<12,4<13$

$1<1,4<1,43<1,432<\ldots<b<1,433<1,44<1,5<2$.

Atunci sumele: $12+1$; $12+1,4$; ...; $12,3+1$; $12,3+1,4$; ... sunt sume inferioare pentru $a+b$.

Sumele $13+2$; $13+1,5$; $12,4+1,5$; ... sunt sume superioare pentru $a+b$.

Orice sumă inferioară a două numere este mai mică decât suma numerelor, iar orice sumă superioară a două numere este mai mare decât suma numerelor.

Se demonstrează că există un unic număr real, mai mare decât orice sumă inferioară şi mai mic decât orice sumă superioară a două numere reale.

Acum putem formula următoarea

> **Definiţie.** Se numeşte **suma a două numere reale** a, b unicul număr real, notat $a+b$, mai mare sau egal decât orice sumă inferioară a numerelor şi mai mic decât orice sumă superioară a numerelor.

Exemplu. Pentru a defini suma numerelor $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$, utilizăm aproximările lor. Avem:

$1<\sqrt{2}<2$	$1<\sqrt{3}<2$
$1,4<\sqrt{2}<1,5$	$1,7<\sqrt{3}<1,8$
$1,41<\sqrt{2}<1,42$	$1,73<\sqrt{3}<1,74$
....	....

Prin definiţie suma numerelor reale $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$ este unicul număr real, notat $\sqrt{2}+\sqrt{3}$, caracterizat de inegalităţile cu sumele inferioare şi respectiv superioare ale celor două numere reale

$2<\sqrt{2}+\sqrt{3}<4$

$3,1<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,3$

$3,14<\sqrt{2}+\sqrt{3}<3,16$

....

Verificaţi că definiţia sumei coincide cu adunarea obişnuită a fracţiilor zecimale finite.

Observaţie. Suma dintre numărul real a şi numărul real $(-b)$, $a+(-b)$ o notăm prin $a-b$ şi defineşte **diferenţa numerelor** a, b.

Înmulţirea

Vom defini acum produsul a două numere reale pozitive utilizând aproximările prin lipsă şi prin adaos ale acestor numere. Avem următoarea:

Definiţie. Se numeşte **produs inferior a două numere reale pozitive**, produsul a două aproximări prin lipsă ale numerelor.
Se numeşte **produs superior a două numere reale pozitive**, produsul a două aproximări prin adaos ale numerelor.

Exemplu. Fie $a=\sqrt{2}$, $b=\sqrt{3}$. Produsele: $1\cdot 1$; $1\cdot 1,7$; $1,4\cdot 1,7$; $1,41\cdot 1,73$;... sunt produse inferioare, iar produsele: $2\cdot 2$; $2\cdot 1,8$; $1,5\cdot 1,8$;... sunt produse superioare pentru numerele a, b.

Orice produs inferior a două numere reale pozitive este mai mic decât produsul celor două numere, iar orice produs superior a două numere reale pozitive este mai mare decât produsul celor două numere.

Se arată că există un unic număr real mai mare decât orice produs inferior şi mai mic decât orice produs superior a două numere reale pozitive.

Această ultimă remarcă permite să formulăm următoarea

Definiţie. Se numeşte **produsul a două numere reale pozitive** a, b, unicul număr real mai mare sau egal decât orice produs inferior al celor două numere şi mai mic decât orice produs superior al numerelor.

Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, atunci pentru efectuarea produsului dintre numerele a, b, notat $a\cdot b$, determinăm produsul valorilor absolute $|a|\,|b|$, iar rezultatul va fi cu semnul plus dacă a, b au acelaşi semn, sau semnul minus dacă a, b au semne contrare.
Dacă unul din numere este egal cu zero, atunci produsul lor este zero.

Observaţie. Dacă $a\neq 0$, atunci numărul real $\frac{1}{a}$ cu proprietatea $a\cdot\frac{1}{a}=1$, se numeşte **inversul lui** a.

Dacă $a,b\in\mathbb{R}$, $b\neq 0$, atunci produsul $a\cdot\frac{1}{b}$ notat $\frac{a}{b}$ reprezintă **câtul** dintre numerele reale a, b. A nu se confunda numărul raţional $\frac{m}{n}$, $m,n\in\mathbb{Z}$, $n\neq 0$, cu împărţirea a două numere reale $\frac{a}{b}$. În general această ultimă fracţie nu reprezintă un număr raţional.

Proprietate. Adunarea şi înmulţirea numerelor reale se bucură de aceleaşi proprietăţi pe care aceste operaţii le au pe $\mathbb{Q}$.

Rămân valabile proprietăţile de compatibilitate ale operaţiilor de adunare şi înmulţire de pe $\mathbb{Q}$ cu relaţia de ordine $\leq$ (monotonia adunării şi înmulţirii) şi pe $\mathbb{R}$.

Formule de calcul prescurtat

Reamintim principalele formule de calcul prescurtat întâlnite în anul precedent, care facilitează calculul algebric. Acestea sunt $(a, b \in \mathbb{R})$:

1) $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$, $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (binomul la pătrat);

2) $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$ (diferenţa de pătrate);

3) $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ (suma cuburilor);
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$ (diferenţa cuburilor).

Exerciţiu propus. Să se arate că $(a, b, c \in \mathbb{R})$:

1) $(a+b+c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2bc + 2ca$;

2) $a^2 + b^2 + c^2 + ab + bc + ca = \dfrac{1}{2}\left[(a+b)^2 + (b+c)^2 + (c+a)^2\right]$;
$a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca = \dfrac{1}{2}\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$;

3) $(a+b+c)^3 - (a^3 + b^3 + c^3) = 3(a+b)(b+c)(c+a)$;

4) $a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)\left(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca\right) = \dfrac{1}{2}(a+b+c)\left[(a-b)^2 + (b-c)^2 + (c-a)^2\right]$.

Deduceţi de aici că $a^3 + b^3 + c^3 = 3abc \Leftrightarrow (a+b+c = 0$ sau $a = b = c)$.

5) $(a^2+b^2)(x^2+y^2) = (ax+by)^2 + (ay-bx)^2$ **şi apoi să se deducă inegalitatea** $(ax+by)^2 \leq$ $\leq (a^2+b^2)(x^2+y^2)$, $a, b, x, y \in \mathbb{R}$, **cu egalitate dacă** $\exists t \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x = at$, $y = bt$.

Arătaţi că dacă $x, y \in \mathbb{R}$ cu $x^2 + y^2 = 1$, atunci $|x+y| \leq \sqrt{2}$.

6) $(ax+by+cz)^2 + (ay-bx)^2 + (az-cx)^2 + (bz-cy)^2 = (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$, $a, b, c, x, y, z \in \mathbb{R}$, **şi apoi deduceţi inegalitatea** $(ax+by+cz)^2 \leq (a^2+b^2+c^2)(x^2+y^2+z^2)$, **cu egalitate dacă există** $t \in \mathbb{R}$ **astfel încât** $x = at$, $y = bt$, $z = ct$.

Arătaţi că dacă $x, y, z \in \mathbb{R}$, $x^2+y^2+z^2 = 1$, atunci $|x+y+z| \leq \sqrt{3}$.

Probleme rezolvate

1. Determinaţi numerele între care sunt cuprinse suma, diferenţa, produsul şi câtul numerelor a, b dacă $2 < a < 3$, $4 < b < 5$.

R. Avem $2 + 4 < a + b < 3 + 5$, adică $6 < a + b < 8$. Pentru $a - b$ observăm că din $4 < b < 5$ rezultă $-5 < -b < -4$ şi deci $2 - 5 < a - b < 3 - 4$, adică $-3 < a - b < -1$.

Pentru a stabili cele două duble inegalităţi am aplicat monotonia adunării.

Utilizăm monotonia înmulţirii şi avem: $2 \cdot 4 < ab < 3 \cdot 5$, adică $8 < ab < 15$.

Câtul $\dfrac{a}{b}$ îl reducem la produsul $a \cdot \dfrac{1}{b}$. Pentru aceasta din $4 < b < 5$, avem: $\dfrac{1}{5} < \dfrac{1}{b} < \dfrac{1}{4}$. Acum rezultă uşor $\dfrac{2}{5} < \dfrac{a}{b} < \dfrac{3}{4}$.

2. Dacă $x, y \in \mathbb{R}$, $x + y = 3$, $xy = 5$, atunci calculaţi: $x^2 + y^2$, $x^3 + y^3$, $x^4 + y^4$, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y}$, $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2}$.

R. Avem: $x^2 + y^2 = (x+y)^2 - 2xy = 9 - 10 = -1$, $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 3(-1-5) = -18$; $x^4 + y^4 = (x^2+y^2)^2 - 2x^2y^2 = 1 - 2 \cdot 25 = -49$; $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{x+y}{xy} = \dfrac{3}{5}$; $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = \dfrac{x^2+y^2}{x^2y^2} = -\dfrac{1}{25}$.

3. Să se arate că $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi apoi să se demonstreze că $\dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{3^2} + \ldots + \dfrac{1}{2009^2} < 1$. Din $\dfrac{1}{(2k+1)^2} < \dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{k} - \dfrac{1}{k+1}\right)$ deduceţi $\sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{1}{(2k+1)^2} < \dfrac{1}{4}$.

R. Avem $k^2 > k(k-1)$, $k \in \mathbb{N}$, $k \geq 2$ şi de aici $\dfrac{1}{k^2} < \dfrac{1}{k(k-1)} = \dfrac{1}{k-1} - \dfrac{1}{k}$. Punând aici $k = 2, \ldots, 2009$

şi însumând inegalităţile rezultă: $\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{2009^2}<1-\frac{1}{2009}<1$.

Valoarea absolută sau modulul unui număr real a are aceeaşi definiţie pe care am prezentat-o la ordonarea numerelor întregi, adică $|a|=\begin{cases} a, & a\geq 0\\ -a, & a<0.\end{cases}$

Proprietăţi ale modulului

1) $|a|\geq 0, \forall a\in\mathbb{R}$, $|a|=0\Leftrightarrow a=0$; **2)** $|a|=\max(-a,a)$; **3)** $|-a|=|a|, \forall a\in\mathbb{R}$;

4) $|a|\leq\varepsilon, \varepsilon>0\Leftrightarrow -\varepsilon\leq a\leq\varepsilon$; **5)** $|a+b|\leq|a|+|b|, \forall a,b\in\mathbb{R}$; **6)** $|ab|=|a|\,|b|, \forall a,b\in\mathbb{R}$ (modulul produsului este egal cu produsul modulelor);

7) $\left|\frac{a}{b}\right|=\frac{|a|}{|b|}, \forall a,b\in\mathbb{R}, b\neq 0$ (modulul câtului este egal cu câtul modulelor).

Demonstraţie. Vom prezenta demonstraţii pentru 5) şi 6).

5) Dacă $a,b\geq 0$, atunci $a+b\geq 0$ şi deci $|a+b|=a+b=|a|+|b|$;
dacă $a,b\leq 0$, atunci $a+b\leq 0$ şi deci $|a+b|=-a-b=|a|+|b|$.
Dacă $a>0,\ b\leq 0$, atunci $a+b\geq 0$ sau $a+b\leq 0$.
Dacă $a+b\geq 0$, atunci $|a+b|=a+b\leq a=|a|<|a|+|b|$.
Dacă $a+b\leq 0$, atunci $|a+b|=-a-b<-b=|b|<|a|+|b|$.

6) Se discută mai multe cazuri:
6.1) $a,b\geq 0\Rightarrow ab\geq 0$ când $|ab|=ab=|a|\,|b|$;
6.2) $a,b\leq 0\Rightarrow ab\geq 0$ când $|ab|=ab=(-a)(-b)=$ a$|\,|b|$;
6.3) $a\geq 0,\ b\leq 0\Rightarrow ab\leq 0$ şi deci $|ab|=-ab=a(-b)=|a|\,|b|$;
6.4) $a\leq 0,\ b\geq 0$, analog cu 6.3). uu

Observaţii. 1) Avem $|a+b|=|a|+|b|\Leftrightarrow ab\geq 0$ (modulul sumei este egal cu suma modulelor dacă numerele au acelaşi semn).
2) Dacă pentru şirul (a_n), $|a_{n+1}-a_n|\leq 1, \forall n$, atunci $|a_n-a_m|\leq|n-m|, \forall n,m\in\mathbb{N}^*$.
3) Dacă $x,y,z\in\mathbb{R}$, atunci $|x|+|y|+|z|\leq|x+y-z|+|x-y+z|+|-x+y+z|$.
4) Dacă $|a-b|\geq|c|$, atunci $(a-b-c)(b-c-a)\leq 0$, $a,b,c\in\mathbb{R}$. Dacă $|a-b|\geq|c|$, $|b-c|\geq|a|$, $|c-a|\geq|b|$, atunci unul din numere este egal cu suma celorlalte două.
5) Dacă $|a+b|+|a-b|\leq 2$, atunci $a^2+b^2\leq 2$.

Probleme rezolvate

1. **Arătaţi că dacă $|x-y|<\varepsilon, \forall\varepsilon>0$, atunci $x=y$.**

R. Prin reducere la absurd, dacă $x\neq y$, atunci alegem $\varepsilon=|x-y|/2$ şi avem $|x-y|<|x-y|/2$, adică $|x-y|<0$, fals. Deci, $x=y$.

2. **Să se rezolve ecuaţia $|x|+|x-1|=1$.**

R. Se explicitează modulele: $|x|=(x, x\geq 0; -x, x<0)$, $|x-1|=(x-1, x\geq 1; 1-x, x<1)$ şi se rezolvă ecuaţia după poziţia lui x faţă de valorile 0 şi 1 (din explicitarea mdulelor). Avem cazurile:
1) $x\in(-\infty,0)$ şi ecuaţia devine $-x+1-x=1\Leftrightarrow x=0$ care nu este soluţie deoarece $0\notin(-\infty,0)$.
2) $x\in[0,1)$ când ecuaţia se scrie $x+1-x=1\Leftrightarrow 1=1$, ceea ce arată că orice $x\in[0,1)$ este soluţie a ecuaţiei.
3) $x\in[1,\infty)$ şi ecuaţia devine $x+x-1=1\Leftrightarrow x=1$, valoare care este soluţie deoarece $1\in[1,\infty)$.
Reunind soluţiile găsite la 1), 2), 3) obţinem $S=[0,1)\cup\{1\}=[0,1]$.

3. **Să se rezolve sistemul** $\begin{cases} |x-2|+|y-3|=4 \\ y=3+|x-2|. \end{cases}$

R. Din a doua ecuaţie $y \geq 3$ şi $|x-2| = y-3$, care înlocuit în prima ecuaţie dă $2(y-3)=4$, adică $y=5$. Din ecuaţia a doua $|x-2|=2$ sau $x-2=\pm 2$, adică $x \in \{0,4\}$. Soluţiile sistemului sunt $(0,5)$, $(4,5)$.

4. **Să se arate că** $\forall x \in \mathbb{R}$, **avem inegalitatea** $\left|\frac{x}{x^2+1}\right| \leq \frac{1}{2}$.

R. Inegalitatea este echivalentă cu $-\frac{1}{2} \leq \frac{x}{x^2+1} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow ((x+1)^2 \geq 0$ şi $(x-1)^2 \geq 0)$, evident adevărate $\forall x \in \mathbb{R}$.

5. **Să se rezolve inecuaţia** $|x-1| \leq 3$.

R. Se explicitează modulul $|x-1| = (x-1,\ x \geq 1;\ 1-x,\ x<1)$ şi se rezolvă inecuaţia în cazurile:
1) $x \in (-\infty, 1)$. Inecuaţia devine $1-x \leq 3 \Leftrightarrow -2 \leq x$. Cum $x<1$ rezultă $x \in (-\infty,1) \cap (-2,\infty) = (-2,1) = S_1$.
2) $x \in [1,\infty)$. Inecuaţia se scrie $x-1 \leq 3 \Leftrightarrow x \leq 4$. Ţinând seama de ipoteza din 2) deducem $x \in [1,\infty) \cap (-\infty,4] = [1,4] = S_2$.
Din 1), 2) mulţimea soluţiilor inecuaţiei se obţine prin reuniunea soluţiilor S_1, S_2, adică $S = S_1 \cup S_2 = (-2,1] \cup [1,4] = (-2,4]$.

6. **Dacă** $x,y>0$, $|x-y|<2$, **atunci** $x+y \leq 2\sqrt{xy+1}$.

R. Avem $x^2-2xy+y^2<4 \Leftrightarrow (x+y)^2 < 4(1+xy)$.

Probleme propuse

1. **Să se arate că** $|x+y+z| \leq |x|+|y|+|z|$, $\forall x,y,z \in \mathbb{R}$.

2. **Să se calculeze:** 1) $|1-\sqrt{2}|+\sqrt{(\sqrt{2}-1)^2}$; 2) $\sqrt{(2-\sqrt{3})^2}-3|\sqrt{3}-1,73|$; 3) $\sqrt{3-2\sqrt{2}}+\sqrt{3+2\sqrt{2}}$.

3. **Să se aducă la o formă mai simplă expresiile:**
1) $E_1 = \sqrt{a^2}+\sqrt{a^2-2a+1}$; 2) $E_2 = \sqrt{4-4a+a^2}+\sqrt{4a^2-4a+1}$.

4. a) **Să se arate că** $a \in [2,3]$, **atunci expresia** $E(a) = \sqrt{a^2-4a+4}+\sqrt{a^2-6a+9}$ **are valoare constantă.**
2) **Să se determine** $a \in \mathbb{R}$ **pentru care expresia** $E(a) = \sqrt{a^2-2a+1}+\sqrt{a^2+2a+1}$ **are valoare constantă.**

5. 1) **Să se rezolve ecuaţiile:** 1) $|x+1|=-1$; 2) $|2x+1|=0$; 3) $|2x-4|+|x-2|=0$;
4) $|x-3|=2$; 5) $|x-1|=|x+3|$; 6) $x+|x|=4$; 7) $2|x|-|x-1|=3$; 8) $2|x|+|1-2x|=1$;
9) $|x|+|x+1|=5$; 10) $|x-3|+2|x+1|=4$. **Găsiţi cea mai mică soluţie întreagă.**
2) **Să se rezolve inecuaţiile:** 1) $|x+3| \leq 0$; 2) $|x-1|<-1$; 3) $|x-2| \leq 1$; 4) $|2x-1| \geq 1$;
5) $x+|x+1| \leq 2$; 6) $3x-1 \leq 2|x|$; 7) $|x+3|+|x-4| \leq 1$. **Găsiţi cea mai mică soluţie.**
8) $|x-1|+|2-x| \geq 3$. **Găsiţi cea mai mică soluţie** $x \in \mathbb{N}^*$.
9) $\left|\frac{n}{2n+1}-\frac{1}{2}\right| < \frac{1}{100}$, $n \in \mathbb{N}$. **Găsiţi cea mai mică soluţie.**
10) $\left|\frac{3n}{n+2}-3\right| > \frac{1}{100}$, $n \in \mathbb{N}$. **Găsiţi cea mai mare soluţie.**

6. **Să se arate că:** 1) $x \in (3,5) \Leftrightarrow |x-4|<1$; 2) **dacă** $x,y \in (3,5)$, **atunci** $xy-4(x+y)+20 \in (3,5)$.

7. **Să se rezolve sistemele de ecuaţii:** 1) $\begin{cases} |x|-2|y|=-5 \\ 3|x|+|y|=6 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2|x|-3|y|=-5 \\ 3|x|+7|y|=1 \end{cases}$.

8. **Dacă** $x,y,z>0$, $|x-y|,|y-z|,|x-z|<2$, **atunci** $\sum x \leq \sum \sqrt{xy+1}$.

Partea întreagă şi partea fracţionară a unui număr

Definiţie. Fie $a \in \mathbb{R}$. Se numeşte **partea întreagă a numărului** a, numărul notat $[a]$ (citim: partea întreagă a lui a), care reprezintă cel mai mare întreg mai mic sau egal cu a.

Deci, $[a] \in \mathbb{Z}$ şi $[a] \leq a < [a]+1$.

Se numeşte **parte fracţionară a numărului** a, numărul notat $\{a\}$ (citim: parte fracţionară a lui a), care reprezintă diferenţa dintre a şi partea sa întregă, $[a]$.

Deci, $\{a\} = a - [a]$.

Trebuie observat că există o infinitate de numere întregi mai mici sau egale cu a. Partea întregă a lui a, $[a]$, este cel mai mare dintre toţi întregii mai mici sau egali cu a.

Din $[a] \leq a < [a]+1$ rezultă $0 \leq \{a\} = a - [a] < 1$. Deci partea fracţionară a lui a este un număr pozitiv subunitar, $\quad 0 \leq \{a\} < 1$.

Exemple. 1) $[3{,}76] = 3, \{3{,}76\} = 3{,}76 - [3{,}76] = 3{,}76 - 3 = 0{,}76$;

2) $[5] = 5$, $\{5\} = 5 - [5] = 5 - 5 = 0$;

3) $[-3{,}16] = -4$, $\{-3{,}16\} = -3{,}16 - [-3{,}16] = -3{,}16 + 4 = 4 - 3 - 0{,}16 = 1 - 0{,}16 = 0{,}84$;

4) $[-3] = -3$, $\{-3\} = -3 - [-3] = -3 + 3 = 0$.

Proprietăţi

Prezentăm câteva proprietăţi care rezultă din definiţie.

I_1. Pentru $m \in \mathbb{Z}$, $x \in [m, m+1) \Leftrightarrow [x] = m$ **(toate numerele reale cuprinse între două numere întregi consecutive au aceeaşi parte întreagă).**

Exemplu. Determinaţi $x \in \mathbb{R}$, pentru care $[2x] = 3$. Din definiţie, avem: $3 \leq 2x < 4$, iar de aici $\frac{3}{2} \leq x < 2$. Deci, $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

I_2. $x, y \in [m, m+1)$, $m \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow [x] = [y]$ **(două numere reale cuprinse între doi întregi consecutivi au aceeaşi parte întreagă).**

Să observăm că intervalul $[m, m+1)$ este de lungime 1. Dacă însă două numere reale sunt la distanţă mai mică decât 1 nu rezultă că au aceeaşi parte întreagă! N-avem decât să luăm $x = 1,9$ şi $y = 2,1$ când $|y - x| = 0,2 < 1$ şi pentru care $[x] = 1$, $[y] = 2$.

I_3. $[x] = x \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$; $\{x\} = 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{Z}$.

I_4. $[m + x] = m + [x]$, $\{x + m\} = \{x\}$, $\forall m \in \mathbb{Z}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Demonstraţie. Cum $[x] \leq x < [x]+1$, avem $[x] + m \leq x + m < [x] + m + 1$, ceea ce arată că numărul $x + m$ este cuprins între doi întregi consecutivi. Deci, $[m + x] = m + [x]$.
Avem: $\{x + m\} = x + m - [x + m] = x + m - [x] - m = x - [x] = \{x\}$. ■

Probleme rezolvate

1. a) **Arătaţi că** $[\sqrt{n(n+1)}] = n$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ **şi** $0,4 < \{\sqrt{n(n+1)}\} < 0,5$.

b) **Demonstraţi egalitatea:** $[\sqrt{1 \cdot 2}] + [\sqrt{2 \cdot 3}] + [\sqrt{3 \cdot 4}] = 6$.

R. a) Avem inegalitatea imediată $n < \sqrt{n(n+1)} < n + 1$, din care se deduce egalitatea şi

$n + \frac{4}{10} < \sqrt{n(n+1)} < n + \frac{5}{10}$ dă dubla inegalitate.

b) Se aplică a) (pentru $n = 1$, $n = 2$ şi $n = 3$) şi avem: $[\sqrt{1 \cdot 2}] = 1$, $[\sqrt{2 \cdot 3}] = 2$, $[\sqrt{3 \cdot 4}] = 3$.

2. **Să se rezolve ecuaţiile:** a) $\left[\frac{x+1}{3}\right] = x - 2$; b) $[x-1] = \sqrt{3}[2x-3]$; c) $x + \{x\} = 2[x]$.

R. a) Membrul stâng al ecuaţiei este număr întreg. Din egalitate se deduce $x - 2 \in \mathbb{Z}$, adică $x \in \mathbb{Z}$. Din definiţia părţii întregi avem inegalităţile: $\left[\frac{x+1}{3}\right] \le \frac{x+1}{3} < \left[\frac{x+1}{3}\right] + 1$ sau $x - 2 \le \frac{x+1}{3} < x - 2 + 1$ sau $3x - 6 \le x + 1 < 3x - 3$.

De aici deducem $x \in \left(2, \frac{7}{2}\right]$. Cum $x \in \mathbb{Z}$, reţinem $x = 3$, soluţie a ecuaţiei date.

b) Să observăm că $[x-1], [2x-3] \in \mathbb{Z}$, iar $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Egalitatea are loc dacă $[x-1] = 0$ şi $[2x-3] = 0$, egalităţi care au loc dacă $0 \le x - 1 < 1$ şi $0 \le 2x - 3 < 1$. De aici, se obţine $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right)$.

c) Considerăm $x = [x] + \{x\}$ şi ecuaţia se rescrie sub forma $2\{x\} = [x]$. Să observăm că $x = 0$ este soluţie a ecuaţiei. Cum $[x] \in \mathbb{Z}$ şi $\{x\} \in [0, 1)$, deducem că $2\{x\} \in [0, 2) \cap \mathbb{Z}$. De aici, $2\{x\} = 1$ ($2\{x\} = 0$, am văzut mai sus), adică $\{x\} = \frac{1}{2}$ şi $[x] = 1$. Deci $x = [x] + \{x\} = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$. Soluţiile ecuaţiei sunt $x_1 = 0$, $x_2 = \frac{3}{2}$.

3 **a) Să se arate că are loc identitatea lui Hermite** $[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] = [2x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

b) Să se rezolve ecuaţia $\left[\frac{3x-1}{4}\right] + \left[\frac{3x+1}{4}\right] = 1$.

R. a) Se demonstrează, mai general, identitatea lui Hermite
$[x] + \left[x + \frac{1}{2}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx]$, $\forall x \in \mathbb{R}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Se pune $[x] = k \in \mathbb{Z}$ şi deci $x \in [k, k+1) = \left[k, k + \frac{1}{n}\right) \cup \left[k + \frac{1}{n}, k + \frac{2}{n}\right) \cup \ldots \cup \left[k + \frac{n-1}{n}, k + \frac{n}{n}\right)$, deci $\exists i \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$ cu $x \in \left[k + \frac{i}{n}, k + \frac{i+1}{n}\right)$.

Deci $S = \sum_{p=0}^{n-1} \left[x + \frac{p}{n}\right] = \sum_{p=0}^{n-i-1} \left[x + \frac{p}{n}\right] + \sum_{p=n-i}^{n} \left[x + \frac{p}{n}\right]$, unde $\left[x + \frac{p}{n}\right] = k$, dacă $p = \overline{0, n-i-1}$ şi $\left[x + \frac{p}{n}\right] = k + 1$, dacă $p = n - i, n$. Deci $S = (n-i)k + i(k+1) = nk + i$, iar $[nx] = nk + i$.

b) Punem $\frac{3x-1}{4} = t$ şi $\frac{3x+1}{4} = t + \frac{1}{2}$, iar ecuaţia devine: $[2t] = 1 \Leftrightarrow 2t \in [1, 2) \Leftrightarrow t \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow \frac{3x-1}{4} \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \Leftrightarrow \frac{1}{2} \le \frac{3x-1}{4} < 1 \Leftrightarrow x \in [1, 5/3)$.

4. **Să se rezolve sistemele:** a) $\begin{cases} [x] + \{y\} = 1,5 \\ [y] + \{y\} = 3,3 \end{cases}$ b) $\begin{cases} x + [y] + \{z\} = 1,1 \\ y + [z] + \{x\} = 2,2 \\ z + [x] + \{y\} = 3,3. \end{cases}$

R. a) Cum pentru $a \in \mathbb{R}$, $[a] \in \mathbb{Z}$ şi $\{a\} \in [0, 1)$, din prima ecuaţie $[x] = 1$, $\{y\} = 0,5$, iar din a doua ecuaţie $[y] = 3$, $\{x\} = 0,3$. De aici $x = [x] + \{x\} = 1,3$ şi $y = [y] + \{y\} = 3,5$.

b) Se adună ecuaţiile şi rezultă $x + y + z = 3,3$. Se adună primele două ecuaţii din care se scade relaţia precedentă şi avem $[y] + \{x\} = 0$, iar de aici $[y] = \{x\} = 0$. Prima ecuaţie devine $[x] + \{z\} = 1,1$, adică $[x] = 1$, $\{z\} = 0,1$. Cu acestea a doua ecuaţie devine $\{y\} + [z] = 2,2$ şi deci $[z] = 2$, $\{y\} = 0,2$. În final

$x = [x] + \{x\} = 1$, $y = 0,2$, $z = 2,1$.

5. **Să se calculeze sumele:** $S_1 = \left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}}\right]$ **(utilizaţi** $2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{n} < \frac{1}{\sqrt{n}} <$ $< 2\sqrt{n} - 2\sqrt{n-1}$**),** $S_2 = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{8}]$.

R. Avem $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}} > 1 + 2(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{4} - \sqrt{3} + \ldots + \sqrt{9} - \sqrt{9}) = 1 + 2\left(\sqrt{9} - \sqrt{2}\right) = 7 - 2\sqrt{2} >$ $> 7 - 3 = 4$, iar, pe de altă parte, $1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{8}} < 1 + 2\left(\sqrt{2} - \sqrt{1} + \sqrt{3} - \sqrt{2} + \ldots + \sqrt{8} - \sqrt{7}\right) =$ $= 1 + 2\left(\sqrt{8} - 1\right) = -1 + 4\sqrt{2} < 5$, unde am utilizat pentru fiecare fracţie din sumă prima şi respectiv a doua inegalitate din enunţ. Deci, $S_1 = 4$.

Pentru a determina a doua sumă să observăm că pentru orice $k \in \mathbb{N}^*$ cu $n^2 \leq k < (n+1)^2$ avem $[\sqrt{k}] = n$. Atunci avem $S_2 = ([\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + [\sqrt{3}]) + ([\sqrt{4}] + [\sqrt{5}] + [\sqrt{6}] + [\sqrt{7} + [\sqrt{8}]) = (1+1+1) + (2+2+2+$ $+2+2) = 13$.

6. **Să se arate că** $[x] + [y] \leq [x + y] \leq [x] + [y] + 1$, $\forall x, y \in \mathbb{R}$.

R. Avem $x = [x] + \{x\}$, $y = [y] + \{y\}$ şi deci $[x + y] = [[x] + [y] + \{x\} + \{y\}] = [x] + [y] + [\{x\} + \{y\}]$. Dar $\{x\} + \{y\} \in [0, 2)$ şi deci $[\{x\} + \{y\}] \in \{0, 1\}$. Prin urmare $[x + y] \geq [x] + [y]$ şi $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$.

7. **Să se rezolve ecuaţia:** $\left[\frac{x-2}{3}\right] = \frac{x+2}{4}$.

R. Notăm $\left[\frac{x-2}{3}\right] = k \in \mathbb{Z}$. Din $k = \frac{x+2}{4}$ se deduce $x = 4k - 2$. Aplicăm definiţia părţii întregi şi obţinem $k \leq \frac{x-2}{3} < k+1$, sau ţinând seama de exprimarea $x = 4k - 2$, dubla inegalitate se rescrie $k \leq \frac{4k-4}{3} < k+1$, $k \in \mathbb{Z}$. De aici $k \in [4, 7) \cap \mathbb{Z} = \{4, 5, 6\}$.

Pentru $k = 4$ rezultă $x_1 = 14$; pentru $k = 5$ avem $x_2 = 18$; pentru $k = 6$ se obţine $x_3 = 22$.

Deci soluţiile ecuaţiei date sunt $x_1 = 14$, $x_2 = 18$, $x_3 = 22$.

8. **Să se rezolve ecuaţia:** $\frac{1}{\{x\}} = \frac{1}{x} + \frac{1}{[x]}$.

R. Ecuaţia există dacă $x \notin \mathbb{Z} \cup (0, 1)$. Ecuaţia nu are soluţii $x < 0$ (membrul stâng pozitiv, membrul drept negativ). De asemenea dacă $x > 2$, atunci $[x] \geq 2$, iar $\frac{1}{x} + \frac{1}{[x]} < 1$, în timp ce $\frac{1}{\{x\}} > 1$. Rămâne $x \in (1, 2)$, când $[x] = 1$. Ecuaţia este $\frac{1}{x-1} = \frac{1}{x} + 1$ cu $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ soluţie.

Probleme propuse

1. **Să se arate că:** $\left[\sqrt{n^2 + 3n + 2}\right] = n + 1$ **şi** $0,4 < \left\{\sqrt{n^2 + 3n + 2}\right\} < 0,5$.

2. **Să se rezolve ecuaţiile:** a) $\left[\frac{x+2}{3}\right] = \frac{x+3}{4}$; b) $\left[\frac{3x+4}{5}\right] = \frac{4x+3}{5}$.

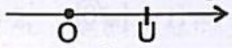
3. **Să se rezolve ecuaţia:** $[x] + \sqrt{x} = 2$.

4. **Să se arate că** $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

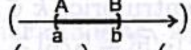
5. **Să se rezolve sistemele:**

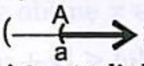
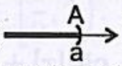
1) $\begin{cases} 3[x] + 4[y] = -6 \\ 2[x] - 3[y] = 13 \end{cases}$; 2) $\begin{cases} 2\{x\} - 3\{y\} = -\frac{5}{6} \\ 3\{x\} - \{y\} = \frac{1}{2} \end{cases}$; 3) $\begin{cases} [x] + \{y\} = 2,6 \\ [y] + \{x\} = 3,7 \end{cases}$; 4) $\begin{cases} x + [y] = 4,1 \\ y - [x] = 2,5 \end{cases}$

Intervale de numere reale

Aşa cum ştiţi din anii precedenţi, fiecărui număr real îi corespunde pe axa numerelor real un punct unic (Prin axă de numere aţi înţeles o dreaptă pe care s-a fixat un punct O – numit origine –, o unitate de măsură şi un sens pozitiv de parcurgere a dreptei , $OU = 1$) şi reciproc, fiecărui punct de pe axă îi corespunde un unic număr real. Asupra acestei corespondenţe între numerele reale şi mulţimea punctelor de pe axă vom reveni în ultimul paragraf al acestui capitol.

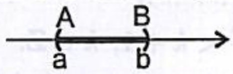
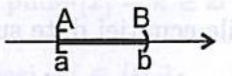
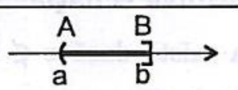
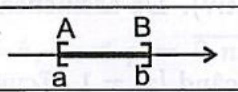
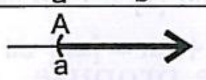
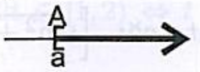
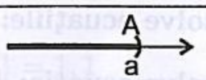
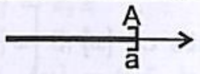
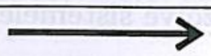
Intervalele de numere reale se reprezintă comod pe axa numerelor reale. Aceste intervale le numim **intervale numerice**. Dacă $a < b$, atunci prin **lungimea intervalului** $[a, b]$ ((a, b), $[a, b)$, $(a, b]$) înţelegem numărul $b - a$.

Un interval numeric de lungime finită (a, b) este mulţimea de numere situate între două numere date, având reprezentarea pe axă un segment ().

Un interval numeric de lungime infinită (a, ∞) sau $(-\infty, a)$ este mulţimea de numere mai mari sau mai mici decât un număr dat şi are reprezentarea pe axă o semidreaptă (; ).

Dăm mai jos, descrierea principalelor intervale, pe care le veţi întâlni în studiul matematicii, cu ajutorul parantezelor şi inegalităţilor.

Fie a, b două numere reale, $a < b$. Mulţimea mai îngroşată pe axa reală reprezintă punctele corespunzătoare mulţimii descrise.

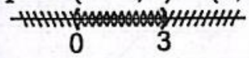
Denumirea mulţimii	Notaţia şi descrierea mulţimii	Reprezentarea mulţimii pe axa reală
1) Intervalul deschis a, b sau intervalul deschis de capete a, b	$(a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$	
2) Intervalul închis la stânga şi deschis la dreapta	$[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x < b\}$	
3) Intervalul deschis la stânga şi închis la dreapta	$(a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a < x \leq b\}$	
4) Intervalul închis a, b	$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\}$	
5) Semidreaptă deschisă la stânga şi nemărginită la dreapta	$(a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x > a\}$	
6) Semidreaptă închisă la stânga şi nemărginită la dreapta	$[a, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq a\}$	
7) Semidreaptă deschisă la dreapta şi nemărginită la stânga	$(-\infty, a) = \{x \in \mathbb{R} \mid x < a\}$	
8) Semidreaptă închisă la dreapta şi nemărginită la stânga	$(-\infty, a] = \{x \in \mathbb{R} \mid x \leq a\}$	
9) Mulţimea numerelor reale $\mathbb{R}$	$(-\infty, \infty) = \{x \in \mathbb{R} \mid -\infty < x < \infty\}$	

Observăm că intervalele descrise la 1) – 4) sunt de lungime finită, în timp ce intervalele 5) – 9) au lungime infinită.

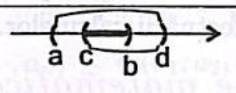
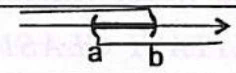
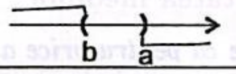
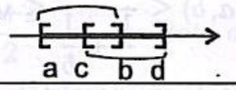
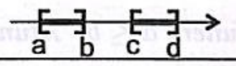
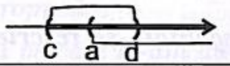
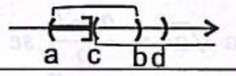
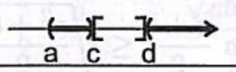
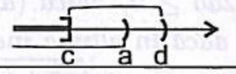
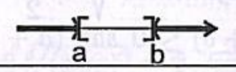
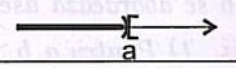
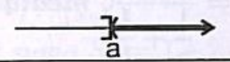
Operaţii cu intervale de numere reale

Deoarece intervalele sunt mulţimi, toate operaţiile studiate la mulţimi se regăsesc şi aici. Locul diagramei Venn-Euler este luat de segmente, semidrepte sau dreapta dată. De obicei, când se face intersecţia a două sau mai multe mulţimi pe axa reală, acestea se haşurează diferit.

Exemple. $(-\infty, 3) \cap (0, \infty) = (0, 3)$. **Partea comună este (0,3), fiind de două ori haşurată.**



În tabelul următor ilustrăm câteva situaţii în care sunt implicate operaţiile cu intervale, iar alăturat rezultatul operaţiei este figurat pe axa reală mai îngroşat.

Operaţia	Intervalele considerate	Rezultatul operaţiei	Reprezentarea rezultatului
	$(a,b),(c,d)$ $a<c<b<d$	(c,b)	
Intersecţia	(a,∞), $(-\infty,b)$ $a<b$	(a,b)	
Intersecţia	(a,∞), $(-\infty,b)$, $b<a$	$\emptyset$	
	$[a,b]$, $[c,d]$, $a<c<b<d$	$[a,d]$	
Reuniunea	$[a,b]$, $[c,d]$, $b<c$	$[a,b]\cup[c,d]$	
	(a,∞), (c,d), $c<a<d$	(c,∞)	
	$(a,b),(c,d)$, $a<c<b<d$	$(a,c]$	
Diferenţa	(a,∞), $[c,d]$, $a<c<d$	$(a,c)\cup(d,\infty)$	
	$(-\infty,a)$, (c,d), $c<a<d$	$(-\infty,c]$	
	$[a,b]$, $a<b$	$\complement[a,b] =$ $=(-\infty,a)\cup(b,\infty)$	
Complementara în raport cu $\mathbb{R}$	$[a,\infty)$	$\complement[a,\infty)=(-\infty,a)$	
	$(-\infty,a]$	$\complement(-\infty,a]=(a,\infty)$	

Aplicaţie. Reprezentaţi pe axa reală, rezultatul operaţiei în fiecare din cazurile:

1) $[-3,5]\cap(0,6)$; 2) $(-\infty,3]\cap[0,4)$; 3) $(1,\infty)\cap[0,3]$; 4) $(-\infty,1)\cap(0,\infty)$; 5) $(-2,8)\cap(9,10)$;

6) $(-3,3)\cap(0,1)$; 7) $(0,3)\cup[2,4]$; 8) $(-5,1)\cup[-3,2]$; 9) $(-\infty,0]\cup(-3,1)$;
10) $(1,7)\cup[0,\infty)$; 11) $(-\infty,0]\cup[-1,\infty)$; 12) $[-1,5)-[0,2]$; 13) $[-3,0]-[1,2]$;
14) $(-1,1)-(-2,2)$; 15) $(-4,1)-(0,3)$; 16) $(-\infty,1)-(-3,5)$; 17) $\complement(-2,2)$;
18) $\complement[-1,\infty)$; 19) $\complement(1,\infty)$; 20) $\complement(-\infty,0]$.

Ordinea efectuării operaţiilor pe $\mathbb{R}$

Se efectuează mai întâi operaţiile de ordinul trei (ridicarea la putere), de ordinul doi (înmulţirile şi împărţirile) şi apoi cele de ordinul întâi (adunările şi scăderile), adică se păstrează ordinea efectuării operaţiilor de pe submulţimea $\mathbb{Q}$.

Dacă în exerciţiu figurează paranteze, atunci se efectuează: 1) calculele din parantezele rotunde; 2) calculele din parantezele drepte; 3) calculele din parantezele acolade cu respectarea, pentru fiecare paranteză, a ordinii efectuării calculelor.

Excursie matematică

INEGALITĂŢI CLASICE REMARCABILE

1. Inegalitatea mediilor

Să se arate că pentru orice $a,b>0$ au loc inegalităţile

$$\min(a,b)\le\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}\le\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le\max(a,b).$$

Avem egalitate în inegalităţi dacă $a=b$.

R. *Presupunem $a\le b$. Atunci prima inegalitate devine $a\le\frac{2ab}{a+b}$ sau $a(a+b)\le 2ab$ sau încă $a^2\le ab$ sau în fine $a(a-b)\le 0$, ceea ce este evident. Are loc egalitate ($a\neq 0$) dacă $a-b=0$, adică pentru $a=b$.*

A doua inegalitate se rescrie $\frac{2ab}{a+b}\le\sqrt{ab}$ sau încă $2\sqrt{ab}\le a+b$ sau $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$, adevărat, fiind pătratul unui număr real. Avem egalitate dacă $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, ceea ce dă $a=b$.

Inegalitatea $\sqrt{ab}\le\frac{a+b}{2}$ se rescrie echivalent $(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2\ge 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $\sqrt{a}-\sqrt{b}=0$, adică dacă $a=b$.

Inegalitatea $\frac{a+b}{2}\le\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$ prin ridicare la pătrat se rescrie echivalent $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\le\frac{a^2+b^2}{2}$ sau încă $a^2+b^2-2ab\ge 0$, adică $(a-b)^2\ge 0$, evident, fiind pătratul unui număr real. Se obţine egalitate în inegalitate dacă în ultima inegalitate avem egalitate, adică dacă $a-b=0$ sau $a=b$.

În fine, inegalitatea $\sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}\le b$ prin ridicare la pătrat se scrie echivalent $\frac{a^2+b^2}{2}\le b^2$ sau $a^2\le b^2$ sau $(a-b)(a+b)\le 0$ sau ($a+b>0$) $a-b\le 0$, ceea ce este adevărat. Avem egalitate în inegalitate dacă $a=b$.

Cazul $a>b$ se abordează asemănător.

Observaţii. *1) Pentru $a,b>0$ se notează:*

$H(a,b)=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$, ***media armonică a numerelor a,b;***

$G(a,b)=\sqrt{ab}$, ***media geometrică a numerelor a,b;***

$A(a,b)=\frac{a+b}{2}$, ***media aritmetică a numerelor a,b;***

$Q(a,b)=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2}{2}}$, *media pătratică a numerelor* a,b;

Deci au loc inegalitățile $\min(a,b)\le H(a,b)\le G(a,b)\le A(a,b)\le Q(a,b)\le \max(a,b)$.

2) Analog se pot defini pentru n numere strict pozitive $a_1,a_2,\cdots a_n$

media armonică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $\quad H(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\dfrac{n}{\dfrac{1}{a_1}+\dfrac{1}{a_2}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}}$,

media geometrică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $\quad G(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sqrt[n]{a_1a_2\cdots a_n}$,

media aritmetică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $\quad A(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\dfrac{a_1+a_2+\cdots+a_n}{n}$

media pătratică a numerelor $a_1,a_2,\cdots,a_n$, $\quad Q(a_1,a_2,\cdots,a_n)=\sqrt{\dfrac{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}{n}}$.

Se demonstrează că au loc inegalitățile

$\min(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le H(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le G(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le A(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le Q(a_1,a_2,\cdots,a_n)\le$
$\le \max(a_1,a_2,\cdots,a_n)$.

Avem egalitate în inegalități dacă $a_1=a_2=\cdots=a_n$.

Aplicaţii

1. ***Să se arate că dacă*** $a,b,c\ge 0$, ***atunci*** $a+b+c\ge\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}$.

R. *Se aplică inegalitatea între media geometrică și cea aritmetică (cunoscută și sub denumirea de inegalitaea lui Cauchy) și avem* $\sqrt{ab}\le\dfrac{a+b}{2}$, *cu egalitate dacă* $a=b$; $\sqrt{bc}\le\dfrac{b+c}{2}$, *cu egalitate dacă* $b=c$; $\sqrt{ac}\le\dfrac{a+c}{2}$, *cu egalitate dacă* $a=c$.

Adunând, membru cu membru, aceste inegalități obținem

$\sqrt{ab}+\sqrt{bc}+\sqrt{ac}\le\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{b+c}{2}+\dfrac{a+c}{2}=a+b+c$, *adică inegalitatea propusă.*

Avem egalitate în inegalitatea dată dacă are loc egalitate în cele trei inegalități pe care le-am adunat, adică dacă $a=b=c$.

2. ***Arătați că dacă*** $a,b,c,d\ge 0$, ***atunci*** $\dfrac{a+b+c+d}{4}\ge\sqrt[4]{abcd}$.

R. *Cum* $\dfrac{a+b}{2}\ge\sqrt{ab}$ *și* $\dfrac{c+d}{2}\ge\sqrt{cd}$, *atunci* $\dfrac{a+b+c+d}{4}=\dfrac{\dfrac{a+b}{2}+\dfrac{c+d}{2}}{2}\ge\dfrac{\sqrt{ab}+\sqrt{cd}}{2}\ge$
$\ge\sqrt{\sqrt{ab}\sqrt{cd}}=\sqrt[4]{abcd}$, *cu egalitate dacă* $a=b$, $c=d$ *și* $\sqrt{ab}=\sqrt{cd}$, *ceea ce dă* $a=b=c=d$.

3. ***Dacă*** $x,y,z\ge 0$, ***atunci*** $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z)\ge 9\sqrt{xyz}$.

R. *Inegalitățile între mediile aritmetică și geometrică ne permit să scriem*

$\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}\ge 3\sqrt[3]{\sqrt{x}\sqrt{y}\sqrt{z}}=3\sqrt[6]{xyz}$; $\quad x+y+z\ge 3\sqrt[3]{xyz}$.

Se face produsul acestor inegalități și rezultă $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})(x+y+z)\ge 9\sqrt[6]{(xyz)^3}=9\sqrt{xyz}$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $x=y=z$.

4. ***Să se arate că:*** $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n}<\dfrac{n+1}{2}$, $n\in\mathbb{N}^*$, $n\ge 2$.

R. *Se aplică inegalitatea între media geometrică și cea aritmetică pentru numerele diferite* $1,2,\cdots,n$ *și avem* $\sqrt[n]{1\cdot2\cdot\ldots\cdot n}<\dfrac{1+2+\cdots+n}{n}=\dfrac{n(n+1)}{2n}=\dfrac{n+1}{2}$, *unde am utilizat suma* $S_n=1+2+\cdots+n=\dfrac{n(n+1)}{2}$. *(Pentru deducerea ei se scrie* S_n *în două moduri:* $S_n=1+2+\cdots+n$, $S_n=n+(n-1)+\cdots+1$ *și se adună obținând* $2S_n=n(n+1)$.*) Inegalitatea este strictă deoarece numerele* $1,2,...,n$ *sunt diferite.*

5. *Dacă $a, b > 0$, atunci $2\sqrt{a} + 3\sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{ab}$.*

R. *Aplicăm inegalitatea între media aritmetică şi cea geometrică şi rezultă*

$$\sqrt{a} + \sqrt{a} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} + \sqrt[3]{b} \geq 5\sqrt[5]{(\sqrt{a})^2(\sqrt[3]{b})^3} = 5\sqrt[5]{ab}.$$

Avem egalitate dacă $\sqrt{a} = \sqrt[3]{b}$, adică dacă $a^3 = b^2$.

Observaţii. 1) *Analog se poate arăta că pentru orice k numere pozitive $a_1, a_2, ..., a_k$ şi numerele naturale $p_1, p_2, ..., p_k$ cu suma $p_1 + p_2 + \cdots + p_k = p$ avem $p_1 \sqrt[p_1]{a_1} + p_2 \sqrt[p_2]{a_2} + \cdots + p_k \sqrt[p_k]{a_k} \geq p\sqrt[p]{a_1 a_2 \cdots a_k}$.*

2) *Dacă se scrie inegalitatea sub forma (am pus $a = y^5$, $b = x^5$) $\frac{2}{5}y^{\frac{5}{2}} + \frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}} \geq xy$, se obţine un caz particular al* **inegalităţii lui Young**:

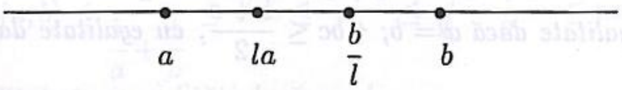
Pentru $x, y, \alpha, \beta > 0$, $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ şi $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$, atunci $\frac{x^\alpha}{\alpha} + \frac{y^\beta}{\beta} \geq xy$.

6. ***Se dau n numere pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ astfel încât $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$.***
Să se demonstreze că $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n$.

R. *Se aplică inegalitatea mediilor şi avem $1 + a_k \geq 2\sqrt{a_k}$, $k = \overline{1, n}$, cu egalitate dacă $a_k = 1$.*
Se face produsul acestor inegalităţi şi se ţine seamă de $a_1 a_2 \cdots a_n = 1$ când avem:

$$(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq 2^n \sqrt{a_1 a_2 \cdots a_n} = 2^n.$$

Observaţii. 1) *Produsul din membrul stâng sugerează să considerăm produsul $(1 + a)(1 + b)$, $a, b > 0$ pentru care $ab =$ constant.*



Vom înlocui numerele a, b cu altele mai „apropiate", la, $\frac{b}{l}$, unde $1 < l < \frac{b}{a}$, pentru care produsul numerelor la, $\frac{b}{l}$ nu se schimbă $la \cdot \frac{b}{l} = ab$. Să vedem ce se întâmplă cu produsul $(1 + la)\left(1 + \frac{b}{l}\right)$ comparativ cu $(1 + a)(1 + b)$. Avem: $(1 + la)\left(1 + \frac{b}{l}\right) - (1 + a)(1 + b) = (l - 1)\left(a - \frac{b}{l}\right) < 0$.

Aceasta arată că „apropiind" numerele a, b, adică înlocuindu-le cu altele la, $\frac{b}{l}$ pentru care produsul $la \cdot \frac{b}{l} = ab$ rămâne acelaşi, produsul $(1 + a)(1 + b)$ descreşte.

Dacă în setul de numere $a_1, a_2, \cdots, a_n$ există două diferite de 1 să spunem $a_1 \leq 1 \leq a_2$, atunci se înlocuiesc cu 1 şi $a_1 a_2$, obţinând setul de numere $1, a_1 a_2, a_3, \cdots, a_n$. Să observăm că aceste numere au aceeaşi proprietate ca şi numerele iniţiale $1 \cdot (a_1 a_2) a_3 \cdots a_n = 1$. Pentru acest set de numere produsul $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ scade.

Dar în acest set de numere unul dintre ele este egal cu 1. Dacă în noul set există două diferite de 1 se repetă raţionamentul de mai sus.

De fiecare dată, pentru fiecare nou set de n numere valoarea produsului $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n)$ scade, atingând valoarea minimă pentru situaţia în care toate numerele sunt egale cu 1, adică $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ când $(1 + a_1)(1 + a_2) \cdots (1 + a_n) \geq (1 + 1)(1 + 1) \cdots (1 + 1) = 2^n$.

Metoda descrisă aici pentru a proba inegalitatea se numeşte **metoda lui Sturm**.

2) *Inegalitatea dată se poate obţine ca un caz particular al* **inegalităţii lui Hugens**:
Dacă $x_i > 0$, $i = \overline{1, n}$, atunci $(1 + x_1)(1 + x_2) \cdots (1 + x_n) \geq (1 + \sqrt[n]{x_1 x_2 \cdots x_n})^n$, punând $x_1 x_2 \cdots x_n = 1$.

7. ***Fie $a, b, c \in \mathbb{R}$ pentru care $a + b + c = 1$. Să se arate că $a^2 + b^2 + c^2 \geq \frac{1}{3}$.***

R. *Punem $a = \frac{1}{3} + x$, $b = \frac{1}{3} + y$, $c = \frac{1}{3} + z$. Din $a + b + c = 1$ rezultă $x + y + z = 0$.*

Avem: $a^2+b^2+c^2=\frac{1}{3}+\frac{2}{3}(x+y+z)+x^2+y^2+z^2=\frac{1}{3}+x^2+y^2+z^2\geq\frac{1}{3}$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $x=y=z=0$, *adică* $a=b=c=\frac{1}{3}$.

8. ***Fie*** $z_n=\sqrt{2+\sqrt{2+...+\sqrt{2}}},\ \}n\ \ n\geq 2$. ***Să se arate că*** $\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}>\frac{1}{4}$.

R. *Este uşor de văzut că* $z_n<2$. *De asemenea* $z_n=\sqrt{2+z_{n-1}}$. *Avem succesiv:*

$$\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}=\frac{2-\sqrt{z_{n-1}+2}}{2-z_{n-1}}=\frac{(\sqrt{z_{n-1}+2}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}{(z_{n-1}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}=\frac{(z_{n-1}+2)-4}{(z_{n-1}-2)(\sqrt{z_{n-1}+2}+2)}=\frac{1}{z_n+2}.$$

Cum $z_n<2$, *atunci* $\frac{2-z_n}{2-z_{n-1}}=\frac{1}{z_n+2}>\frac{1}{4}$.

9. ***Dacă*** $x_i>0,\ i=\overline{1,n}$ ***şi*** $\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{1+x_i}=1$, ***atunci*** $\prod_{i=1}^{n}x_i\geq(n-1)^n$.

R. *Punem* $\frac{1}{1+x_i}=y_i\in(0,1)$ *şi avem* $\left(x_i=\frac{1-y_i}{y_i}\right)$:

$$\prod x_i=\prod\frac{1-y_i}{y_i}=\prod\frac{y_1+...+y_{i-1}+y_{i+1}+...+y_n}{y_i}\geq\frac{1}{\prod y_i}\prod(n-1)(y_1\cdot...\cdot y_{i-1}y_{i+1}\cdot...\cdot y_n)^{\frac{1}{n-1}}=$$

$$=\frac{1}{\prod y_i}(n-1)^n\prod y_i=(n-1)^n.$$

2. Inegalitatea Cauchy-Buniakovski-Schwartz *(C.B.S.)*

Fie a_1,a_2,x_1,x_2 *numere reale. Să se arate că:* $\qquad(x_1a_1+x_2a_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(a_1^2+a_2^2)$.

Avem egalitate în inegalitate dacă $x_1a_2=a_1x_2$.

R. *Se arată uşor (prin calcul) că are loc următoarea egalitate (Lagrange)*

$$(x_1^2+x_2^2)(a_1^2+a_2^2)=(x_1a_1+x_2a_2)^2+(x_1a_2-a_1x_2)^2.$$

Dacă în memebrul drept se renunţă la ultimul termen pozitiv se obţine inegalitatea dorită. Avem egalitate în inegalitate dacă termenul la care s-a renunţat este nul, adică dacă $x_1a_2-a_1x_2=0$.

Dacă $a_1,a_2\neq 0$, *de aici rezultă* $\frac{x_1}{a_1}=\frac{x_2}{a_2}$.

Observaţie. *Dacă* $a_i,\ x_i,\ i=\overline{1,n}$ *sunt numere reale, atunci are loc inegalitatea C.B.S.*

$\left(\sum_{i=1}^{n}x_ia_i\right)^2\leq\left(\sum_{i=1}^{n}x_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}a_i^2\right)$, *cu egalitate dacă* $x_ia_j=x_ja_i,\ i\neq j,\ i,j=\overline{1,n}$.

Aplicaţii. 1. ***Să se determine cea mai mică şi cea mai mare valoare a expresiei*** $A=x_1y_1+x_2y_2$ ***dacă se ştie că*** $x_1^2+x_2^2\leq 2$ ***şi*** $y_2^2+y_2^2\leq 4$.

R. *Aplicăm inegalitatea C.B.S. şi avem* $A^2=(x_1y_1+x_2y_2)^2\leq(x_1^2+x_2^2)(y_1^2+y_2^2)\leq 8$.

De aici $|A|\leq 2\sqrt{2}$. *Pentru* $x_1=x_2=1$ *şi* $y_1=y_2=\sqrt{2}$ *expresia A ia cea mai mare valoare egală cu* $2\sqrt{2}$, *iar pentru* $x_1=x_2=-1$ *şi* $y_1=y_2=\sqrt{2}$, *A ia cea mai mică valoare egală cu* $-2\sqrt{2}$.

2. ***Să se arate că dacă*** $x,y,z\in\mathbb{R}$, ***atunci*** $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$.

R. *Inegalitatea C.B.S. ne dă* $(1\cdot x+1\cdot y+1\cdot z)^2\leq(1^2+1^2+1^2)(x^2+y^2+z^2)$ *sau* $(x+y+z)^2\leq 3(x^2+y^2+z^2)$, *cu egalitate dacă* $\frac{x}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z}{1}$.

3. ***Să se arate că inegalitatea*** $\sqrt{a+1}+\sqrt{2a-3}+\sqrt{50-3a}\leq 12$, ***are loc pentru toate valorile lui a pentru care există radicalii.***

R. *Utilizăm inegalitatea din problema precedentă în care* $x=\sqrt{a+1},\ y=\sqrt{2a-3},\ z=\sqrt{50-3a}$.

3. Inegalitatea lui Bernoulli

Să se arate că dacă $\alpha > 0$ şi $r > 1$, $r \in \mathbb{Q}$, atunci $(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha$.

R. *Fie $r = \dfrac{p}{q} > 1$. Se aplică inegalitatea între media geometrică şi cea aritmetică pentru numerele $\underbrace{(1+r\alpha),(1+r\alpha),...,(1+r\alpha)}_{q}, \underbrace{1,1,...,1}_{(p-q)}$, când avem: $\sqrt[p]{(1+r\alpha)^q} < 1 + \dfrac{qr\alpha}{p} = 1+\alpha$.*

De aici rezultă $1 + r\alpha < (1+\alpha)^{\frac{p}{q}}$, adică $(1+\alpha)^r > 1 + r\alpha$.

Aplicaţii. 1. ***Să se arate că dacă $n > 999.000$, atunci $1,001^n > 1000$.***

R. *Avem $\left(1+\dfrac{1}{1000}\right)^n > 1 + \dfrac{n}{1000}$ (cf. ineg. Bernoulli) $> 1 + 999 = 1000$.*

2. ***Să se arate că $6^{90} > 5^{94}$.***

R. *Avem $6^{90} > 5^{94} \Leftrightarrow 6^{45} > 5^{47} \Leftrightarrow \left(\dfrac{6}{5}\right)^{45} > 5^2$. Dar $\left(\dfrac{6}{5}\right)^5 = \left(1+\dfrac{1}{5}\right)^5 > 1 + 5\cdot\dfrac{1}{5} = 2$, unde în inegalitate s-a aplicat Bernoulli. Deci $\left(\dfrac{6}{5}\right)^{45} > 2^9 > 25$.*

3. ***Să se arate că primele 1000 de zecimale după virgulă ale numărului $\sqrt[10^{1000}]{2}$ sunt egale cu zero.***

R. *Avem $(n = 10^{1000})$ $\sqrt[n]{2} - 1 < \dfrac{1}{n} \Leftrightarrow 2 < \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$, adevărat conform inegalităţii lui Bernoulli.*

4. Inegalitatea lui Cebâşev

1) Dacă $a_1 \le a_2$ şi $b_1 \le b_2$ sau $a_1 \ge a_2$ şi $b_1 \ge b_2$, atunci $(a_1+a_2)(b_1+b_2) \le 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

2) Dacă $a_1 \le a_2$ şi $b_1 \ge b_2$ sau $a_1 \ge a_2$ şi $b_1 \le b_2$, atunci $(a_1+a_2)(b_1+b_2) \ge 2(a_1b_1 + a_2b_2)$.

R. *1) Efectuăm calculele şi grupăm convenabil când obţinem $(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) \ge 0$, ceea ce este evident.*
2) Analog lui 1).

Observaţie. *Inegalitatea lui Cebâşev se extinde la două n- upluri de numere $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ sau $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ şi $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ (spunem că cele două n- upluri au aceeaşi monotonie) când avem $(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n) \le n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.*

Dacă $a_1 \le a_2 \le ... \le a_n$ şi $b_1 \ge b_2 \ge ... \ge b_n$ sau $a_1 \ge a_2 \ge ... \ge a_n$ şi $b_1 \le b_2 \le ... \le b_n$ (n- uplurile au monotonii diferite), atunci $(a_1+a_2+...+a_n)(b_1+b_2+...+b_n) \ge n(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)$.

Aplicaţii. 1. ***Dacă a, b, c sunt lungimile laturilor triunghiului ABC, iar A, B, C sunt măsurile în radiani ale unghiurilor triunghiului, atunci $\dfrac{aA + bB + cC}{a+b+c} \ge \dfrac{\pi}{3}$.***

R. *Din enunţ $A + B + C = \pi$. Dacă $a \le b \le c$, atunci $A \le B \le C$ (laturii mai mari într-un triunghi i se opune unghiul mai mare).*

Deci, conform inegalităţii Cebâşev, $(a+b+c)(A+B+C) \le 3(aA+bB+cC)$ sau $\dfrac{\pi}{3} \le \dfrac{aA+bB+cC}{a+b+c}$.

2.* ***Să se arate că în orice triunghi ABC are loc inegalitatea $(m_a^2+m_b^2+m_c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \ge 27S^2$, unde m_a este lungimea medianei din A, h_a este lungimea înălţimii din A, iar S este aria triunghiului ABC.***

R. *Avem $m_a^2 = \dfrac{2(b^2+c^2)-a^2}{4}$, iar de aici $m_a^2 + m_b^2 + m_c^2 = \dfrac{3}{4}(a^2+b^2+c^2)$, iar inegalitatea devine $(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \ge 36S^2$.*

Dacă $a \le b \le c$, atunci $h_a \ge h_b \ge h_c$ şi $a^2 \le b^2 \le c^2$, $h_a^2 \ge h_b^2 \ge h_c^2$.

Ultimelor două triplete li se aplică Cebaşev şi rezultă $(a^2+b^2+c^2)(h_a^2+h_b^2+h_c^2) \ge 3(a^2h_a^2 + b^2h_b^2 + c^2h_c^2) = 36S^2$ (deoarece $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$). Avem egalitate în inegalitate dacă $a = b = c$.

4'. Inegalităţi de tip Cebâşev

Dacă $a_1 \le a_2$ şi $b_1 \le b_2$ sau $a_1 \ge a_2$ şi $b_1 \ge b_2$, a_i, b_i $(i = 1, 2)$ numere reale, atunci cuplurile de numere (a_1, a_2), (b_1, b_2) se spune că au aceeaşi monotonie.

Propoziţie. *Fie (a_1, a_2), (b_1, b_2) cupluri de aceeaşi monotonie. Atunci* $a_1b_1 + a_2b_2 \ge a_1b_2 + a_2b_1$.

Demonstraţie. *Relaţia de demonstrat se scrie echivalent* $(a_1 - a_2)(b_1 - b_2) \ge 0$, *ceea ce este adevărat, deoarece $a_1 - a_2$, $b_1 - b_2$ au acelaşi semn. Avem egalitate în inegalitate dacă $a_1 = a_2$ sau $b_1 = b_2$.* ■

Observaţie. *Dacă (a_1, a_2), (b_1, b_2) au monotonii diferite, atunci are loc inegalitatea* $a_1b_1 + a_2b_2 \le a_1b_2 + a_2b_1$.

Problemă rezolvată. ***Dacă $a, b > 0$, atunci să se arate că $a^3 + b^3 > a^2b + ab^2$.***

R. *Se consideră cuplurile de aceeaşi monotonie $(a, b), (a^2, b^2)$. Conform propoziţiei are loc inegalitatea $a \cdot a^2 + b \cdot b^2 \ge ab^2 + a^2b$, care este inegalitatea de demonstrat.*

În mod asemănător spunem că tripletele de numere reale strict pozitive (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) au aceeaşi monotonie dacă ($a_1 \le a_2 \le a_3$ şi $b_1 \le b_2 \le b_3$) sau ($a_1 \ge a_2 \ge a_3$ şi $b_1 \ge b_2 \ge b_3$). Spunem că tripletul (b'_1, b'_2, b'_3) se obţine din tripletul (b_1, b_2, b_3) printr-o permutare a elementelor acestuia dacă $\{b'_1, b'_2, b'_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$.

Propoziţie. *Fie (a_1, a_2, a_3), (b_1, b_2, b_3) triplete de aceeaşi monotonie, iar (b'_1, b'_2, b'_3) se obţine din (b_1, b_2, b_3) printr-o permutare. Atunci* $a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \ge a_1b'_1 + a_2b'_2 + a_3b'_3$.

Problemă rezolvată. ***Dacă $a, b, c > 0$, atunci $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge \frac{3}{2}$.*** **R.** *Acestei probleme i s-a dat o soluţie în prima parte a acestui capitol. Vom prezenta o soluţie pentru această problemă utilizând rezultatul de mai sus. Presupunem că $a \le b \le c$. Atunci $a + b \le a + c \le b + c$ şi de aici $\frac{1}{b+c} \le \frac{1}{a+c} \le \frac{1}{a+b}$. Prin urmare tripletele (a, b, c), $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$ au aceeaşi monotonie. Vom considera permutări ale tripletului $\left(\frac{1}{b+c}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}\right)$: $\left(\frac{1}{a+c}, \frac{1}{a+b}, \frac{1}{b+c}\right)$ şi $\left(\frac{1}{a+b}, \frac{1}{a+c}, \frac{1}{b+c}\right)$ şi aplicăm propoziţia de două ori. Avem*

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge a\frac{1}{a+c} + b\frac{1}{a+b} + c\frac{1}{b+c} \text{ şi}$$

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \ge a\frac{1}{a+b} + c\frac{1}{a+c} + b\frac{1}{b+c}.$$

Adunând, membru cu membru, ultimele două inegalităţi rezultă:

$$2\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right) \ge \frac{a+b}{a+b} + \frac{a+c}{a+c} + \frac{b+c}{b+c} = 3.$$

De aici rezultă imediat inegalitatea dorită.

5. Inegalitatea lui Minkowski

Dacă $a_1, a_2, b_1, b_2 \in \mathbb{R}$, atunci $\sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2} \le \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$.

R. *Inegalitatea este echivalentă cu cea obţinută prin ridicare la pătrat. Avem: $(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2 \le$ $\le a_1^2 + a_2^2 + 2\sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)} + b_1^2 + b_2^2$ sau după unele calcule $-a_1b_1 - a_2b_2 \le \sqrt{(a_1^2 + a_2^2)(b_1^2 + b_2^2)}$. Dacă membrul stâng este negativ, atunci inegalitatea are loc deoarece membrul drept este pozitiv. Dacă*

membrul stâng este pozitiv, atunci prin ridicare la pătrat obţinem
$(a_1b_1)^2+2a_1b_1a_2b_2+(a_2b_2)^2\le(a_1b_1)^2+(a_1b_2)^2+(a_2b_1)^2+(a_2b_2)^2$ *sau*
$0\le(a_1b_2-a_2b_1)^2$, *ceea ce este adevărat. Avem egalitate dacă* $\dfrac{a_1}{b_1}=\dfrac{a_2}{b_2}$, $b_1,b_2\neq 0$.

Observaţii. **1)** *Dacă $A(a_1,a_2)$, $B(b_1,b_2)$ sunt două puncte în plan, atunci lungimea segmentului $[AB]$ este egală cu $AB=\sqrt{(a_1-b_1)^2+(a_2-b_2)^2}$, iar $OA=\sqrt{a_1^2+a_2^2}$, $OB=\sqrt{b_1^2+b_2^2}$. Inegalitatea dată se traduce în una geometrică: în triunghiul OAB, o latură $[AB]$ este mai mică decât suma celorlalte două.*

2) *Inegalitatea se extinde la numerele reale a_i,b_i, $i=\overline{1,n}$ când* $\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n(a_i-b_i)^2}\le\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n a_i^2}+\sqrt{\sum\limits_{i=1}^n b_i^2}$.

3) *Dacă $A(c,a)$, $B(b,d)$ sunt două puncte în plan $(a,b,c,d>0)$, $x\in[0,c]$, $y\in[0,d]$, $M(x,0)$, $N(0,y)$, atunci se arată că $AM+MN+NB$ este minimă dacă* $\dfrac{x}{y}=\dfrac{b+c}{a+d}$.

6. ***Dacă $a_1,a_2\in\mathbb{R}$, atunci $\sqrt{a_1^2+a_2^2}\le|a_1|+|a_2|$.***

R. *Inegalitatea este echivalentă cu cea obţinută prin ridicare la pătrat. Avem:* $a_1^2+a_2^2\le a_1^2+2|a_1|\,|a_2|+a_2^2$ *sau* $0\le 2|a_1|\,|a_2|$, *adevărat.*

Avem egalitate dacă $a_1=0$ sau $a_2=0$.

Observaţii. **1)** *Acestei inegalităţi i se poate da următoarea interpretare geometrică: dacă $|a_1|$, $|a_2|$ sunt lungimile catetelor unui triunghi dreptunghic, atunci $\sqrt{a_1^2+a_2^2}$ este lungimea ipotenuzei care este mai mică decât suma lungimilor catetelor.*

2) *Pentru oricare numere reale $a_1,a_2,...,a_n$ are loc inegalitatea*
$\sqrt{a_1^2+a_2^2+...+a_n^2}\le|a_1|+|a_2|+...+|a_n|$.

7. ***Dacă $a_1,a_2,b_1,b_2\in\mathbb{R}$, atunci $\sqrt{a_1^2+a_2^2}-\sqrt{b_1^2+b_2^2}\le|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$ şi $\sqrt{a_1^2+a_2^2}+\sqrt{b_1^2+b_2^2}\ge|a_1-b_1|+|a_2-b_2|$. Interpretaţi geometric a doua inegalitate.***

8. ***Fie fracţiile ireductibile pozitive $\dfrac{a_1}{b_1},\dfrac{a_2}{b_2},...,\dfrac{a_n}{b_n}$. Să se arate că***

$$\min_{1\le i\le n}\frac{a_i}{b_i}\le\frac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}\le\max_{1\le i\le n}\frac{a_i}{b_i}.$$

R. *Notăm* $m=\min\limits_{1\le i\le n}\dfrac{a_i}{b_i}$, $M=\max\limits_{1\le i\le n}\dfrac{a_i}{b_i}$. *Atunci*

$mb_1\le a_1\le Mb_1$

$mb_2\le a_2\le Mb_2$

....

$mb_n\le a_n\le Mb_n$.

Adunând aceste inegalităţi, membru cu membru, rezultă

$$m(b_1+b_2+...+b_n)\le a_1+a_2+...+a_n\le M(b_1+b_2+...+b_n),$$

iar de aici $m\le\dfrac{a_1+a_2+...+a_n}{b_1+b_2+...+b_n}\le M$.

Observaţii. **1)** *În particular pentru $k_1,k_2,...,k_n>0$, are loc inegalitatea*
$\min\limits_{1\le i\le n}a_i\le\dfrac{k_1a_1+k_2a_2+...+k_na_n}{k_1+k_2+...+k_n}\le\max\limits_{1\le i\le n}a_i$.

2) *Dacă în 1) se pune $k_1=k_2=...=k_n=1$ rezultă* $\min\limits_{1\le i\le n}a_i\le A(a_1,a_2,...,a_n)\le\max\limits_{1\le i\le n}a_i$.

Aplicaţii ale inegalităţilor la determinarea celei mai mari şi a celei mai mici valori

Din inegalitatea între media aritmetică şi cea geometrică a două numere pozitive a, b ($\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$) *rezultă următoarele:*

1) Dacă suma numerelor pozitive a, b este egală cu s, $a+b=s$, atunci produsul acestor numere ia valoarea cea mai mare (deci cu egalitate în inegalitate) dacă $a=b=\frac{s}{2}$ (deci dacă cele două numere sunt egale) când cea mai mare valoare este $ab=\left(\frac{s}{2}\right)^2$.

2) Dacă produsul numerelor pozitive a, b este egal cu p, $ab=p$, atunci suma lor ia cea mai mică valoare pentru $a=b=\sqrt{p}$, când cea mai mică valoare este egală cu $2\sqrt{p}$.

Consideraţii similare se pot face pentru n numere pozitive.

Aplicaţii

1. ***Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei*** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{a}{x}$, $a>0$.

R. *Să observăm că produsul numerelor pozitive x, $\frac{a}{x}$, este constant $x\cdot\frac{a}{x}=a$. Conform cu 2) suma $x+\frac{a}{x}$ au valoarea cea mai mică dacă $x=\frac{a}{x}$, adică $x=\sqrt{a}$, când $\min\limits_{x>0} f(x)=2\sqrt{a}$.*

2. ***Să se determine cea mai mică valoare a funcţiei*** $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{x^3+x+2}{x}$.

R. *Să observăm că are loc scrierea $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$, iar produsul $x^2\cdot 1\cdot\frac{1}{x}\cdot\frac{1}{x}=1$ (constant). Prin urmare suma $f(x)=x^2+1+\frac{1}{x}+\frac{1}{x}$ este minimă dacă numerele sunt egale $x^2=1=\frac{1}{x}$. De aici $x=1$, când $\min\limits_{x>0} f(x)=f(1)=4$.*

3. ***Să se determine cea mai mare valoare a funcţiei:***

a) $f:\left(-\frac{1}{3},1\right)\to\mathbb{R}$, $f(x)=(1-x)^3(1+3x)$. *b)* $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\sqrt{4x^2+9}(\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2+1})$.

R. *a) Scriem funcţia sub forma $f(x)=(1-x)(1-x)(1-x)(1+3x)$, cu factorii $1-x$, $1+3x$ pozitivi (deoarece $-\frac{1}{3}<x<1$) şi în plus $(1-x)+(1-x)+(1-x)+(1+3x)=4$ (=constant). Atunci cea mai mare valoare a produsului $f(x)$ are loc pentru $1-x=1+3x$, adică pentru $x=0$. Găsim $\max\limits_{-\frac{1}{3}<x<1} f(x)=f(0)=1$.*

b) Avem $f(x)=\sqrt{4x^2+9}\frac{3}{\sqrt{x^2+4}+\sqrt{x^2+1}}\leq 3$, $\forall x\in\mathbb{R}\Leftrightarrow x^2\geq 0$ (după două ridicări la pătrat). Pentru $x=0$ rezultă $f(0)=3$.

4. ***Dacă numerele x_1,x_2,x_3,x_4,x_5 sunt nenegative şi $x_1+x_2+x_3+x_4+x_5=1$, atunci determinaţi cea mai mare valoare pentru $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5$.***

R. *Se verifică prin calcul inegalitatea* $x_1x_2+x_2x_3+x_3x_4+x_4x_5\leq(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)$ *(în membrul drept găsindu-se termenii din membrul stâng şi alti termeni pozitivi). Aplicăm inegalitatea mediilor şi avem:* $(x_1+x_3+x_5)(x_2+x_4)\leq\left(\frac{x_1+x_3+x_5+x_2+x_4}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$.

Valoarea maximă căutată este $\frac{1}{4}$ şi se atinge, de exemplu, pentru $x_1=x_2=\frac{1}{2}$, $x_3=x_4=x_5=0$.

5. ***Să se rezolve în numere pozitive sistemul:*** $\begin{cases} x_1+x_2+\ldots+x_n=3 \\ \frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\ldots+\frac{1}{x_n}=3. \end{cases}$

R. *Adunăm ecuaţiile, membru cu membru, şi obţinem:* $\left(x_1+\frac{1}{x_1}\right)+\left(x_2+\frac{1}{x_2}\right)+...+\left(x_n+\frac{1}{x_n}\right)=6.$

Dar $x+\frac{1}{x}\geq 2$, *dacă* $x>0$, *cu egalitate dacă* $x=1$. *Deci* $n\leq 3$.

Dacă $n=3$, *atunci* $x_1=x_2=x_3=1$. *Pentru* $n=1$ *relaţiile n-au loc, iar dacă* $n=2$ *rezultă* $x_1=\frac{3\pm\sqrt{5}}{2}$, $x_2=\frac{3\mp\sqrt{5}}{2}$. *Pentru* $n\geq 4$ *sistemul nu are soluţii.*

6. *Să se rezolve sistemul:* $\frac{2x_1^2}{1+x_1^2}=x_2,\ \frac{2x_2^2}{1+x_2^2}=x_3,...,\ \frac{2x_n^2}{1+x_n^2}=x_1.$

R. *Utilizând inegalitatea mediilor* $\frac{2ab}{a+b}\leq\sqrt{ab}$, $a,b>0$, *cu egalitate dacă* $a=b$, *din ultima ecuaţie a sistemului avem:* $x_1=\frac{2x_n^2}{1+x_n^2}\leq x_n$, *cu egalitate dacă* $x_1=x_n=1$.

Să observăm că $x_1,x_2,...,x_n>0$. *Din prima ecuaţie deducem asemănător* $x_2\leq x_1$. *Procedând analog cu celelalte ecuaţii rezultă* $x_n\leq x_{n-1}\leq...\leq x_2\leq x_1\leq x_n$.

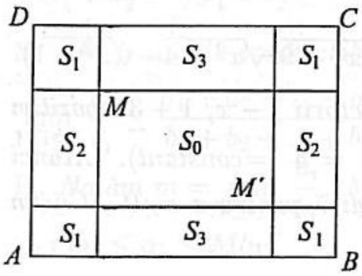
De aici avem egalitate peste tot (primul şi ultimul termen fiind egali).

Deci $x_1=x_2=...=x_n=1$.

7*. *Se dă dreptunghiul ABCD şi în interiorul său se consideră punctul M prin care se duc paralele la laturile dreptunghiului. Ele împart dreptunghiul în patru dreptunghiuri. Să se arate că unul din cele două dreptunghiuri care conţin vârfurile A şi C are aria egală cu cel mult* $\frac{1}{4}$ ***din aria dreptunghiului.***

R. *Se consideră axele de simetrie ale dreptunghiului care îl împart în patru sferturi. Dacă punctul se alege în unul din cele două sferturi care conţin punctele A şi C atunci afirmaţia este evidentă.*

Să considerăm punctul ales în unul din cele două sferturi rămase (vezi figura).



Fie M′ simetricul lui M în raport cu centrul dreptunghiului. Prin acest punct se duc paralele la laturile dreptunghiului. S-au pus în evidenţă 9 dreptunghiuri: patru de arie S_1, *două de arie* S_2, *două de arie* S_3 *şi unul de arie* S_0. *Trebuie să arătăm că* S_1+S_2 *sau* S_1+S_3 *nu depăşesc* $\frac{S}{4}$, *unde S este aria dreptunghiului ABCD.*

Cum $4S_1+2S_2+2S_3=S-S_0<S$ *şi deci* $2S_1+S_2+S_3<\frac{S}{2}$ *sau*

$$(S_1+S_2)+(S_1+S_3)<\frac{S}{2}.$$

De aici unul din numerele S_1+S_2, S_1+S_3 *este mai mic decât* $\frac{S}{4}$ *(în caz contrar, adică dacă* S_1+S_2, $S_1+S_3>\frac{S}{4}$ *ar implica* $S_1+S_2+S_1+S_3>\frac{S}{2}$, *fals).*

8*. *Să se afle cea mai mică valoare a expresiei:* $ax^n+\frac{b}{x^m}$, $x>0$, $a,b>0$, $m,n\in\mathbb{N}^*$.

R. *Avem:* $ax^n+\frac{b}{x^m}=\underbrace{\frac{a}{m}x^n+...+\frac{a}{m}x^n}_{m}+\underbrace{\frac{b}{nx^m}+...+\frac{b}{nx^m}}_{n}\geq(m+n)\sqrt[m+n]{\left(\frac{a}{m}x^n\right)^m\left(\frac{b}{nx^m}\right)^n}=$

$=(m+n)\sqrt[m+n]{\frac{a^mb^n}{m^nn^n}}$, *care reprezintă cea mai mică valoare pentru expresia din enunţul problemei şi se obţine pentru* $\frac{a}{m}x^n=\frac{b}{nx^m}$, *adică pentru* $x=\left(\frac{bm}{an}\right)^{\frac{1}{m+n}}$.

9*. *Dacă suma $x_1+x_2+...+x_n=k$, $x_i>0$, atunci $x_1^{k_1}x_2^{k_2}...x_n^{k_n}$, $k_i\in\mathbb{N}^*$ este maxim dacă $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=...=\frac{x_n}{k_n}$.*

R. *Avem:*

$$\underbrace{\frac{x_1}{k_1}\dots\frac{x_1}{k_1}}_{k_1}\cdot\underbrace{\frac{x_2}{k_2}\dots\frac{x_2}{k_2}}_{k_2}\cdot\ldots\cdot\underbrace{\frac{x_n}{k_n}\dots\frac{x_n}{k_n}}_{k_n}\le\left(\frac{x_1+x_2+...+x_n}{k_1+k_2+...+k_n}\right)^{k_1+k_2+...+k_n}=\left(\frac{k}{k_1+...+k_n}\right)^{k_1+...+k_n}$$

Deci produsul cerut este maxim dacă $\frac{x_1}{k_1}=\frac{x_2}{k_2}=...=\frac{x_n}{k_n}$.

PRINCIPIUL EXTREMAL

În rezolvarea multor probleme se cere determinarea unui element extremal, „de frontieră", adică un element pentru care o mărime oarecare ia cea mai mare sau cea mai mică valoare, de exemplu, cea mai mare sau cea mai mică latură a triunghiului, cel mai mare sau cel mai mic unghi, etc. Proprietatea corespunzătoare elementului extremal poate conduce la rezolvarea problemei.
Vom ilustra cele spuse mai sus prin următoarele

Probleme rezolvate

1. *Să se arate că cercurile construite pe laturile unui patrulater convex ca diametre, acoperă întregul patrulater.*

R. *Fie M, un punct arbitrar din interiorul patrulaterului. Avem $\widehat{AMB}+\widehat{BMC}+\widehat{CMD}+\widehat{DMA}=360°$ (prin $\widehat{AMB}$ înţelegem măsura unghiului $\widehat{AMB}$ în grade sexagesimale). Atunci cel mai mare dintre aceste unghiuri este mai mare sau egal cu $90°$. Fie acesta $\widehat{AMB}$. Prin urmare punctul M se află în interiorul cercului de diametru $[AB]$.*

2. *În interiorul cercului de rază 1 se află 8 puncte. Să se arate că distanţa între două dintre cele opt puncte este mai mică decât 1.*

R. *Există cel puţin şapte puncte, diferite de centrul O al cercului. Cel mai mic dintre unghiurile $\widehat{A_iOA_j}$, unde A_i, A_j sunt punctele date, nu depăşeşte $\frac{360}{7}<60°$. Dacă A şi B sunt punctele care corespund unghiului cel mai mic, atunci $AB<1$, deoarece $AO<1$, $BO<1$, iar unghiul $\widehat{AOB}$ nu poate fi cel mai mare unghi al triunghiului AOB.*

3. *În plan se consideră $n\ge 3$ puncte, nu toate situate pe aceeaşi dreaptă. Arătaţi că există un cerc care trece prin cel puţin trei din punctele date şi care nu conţine în interior nici unul din punctele rămase.*

R. *Fie A şi B, două din punctele date pentru care distanţa dintre ele este cea mai mică dintre toate distanţele realizate cu oricare două din punctele date. Fie C acel punct dintre cele rămase pentru care unghiul $\widehat{ACB}$ are măsura cea mai mare. Atunci în interiorul cercului care trece prin A, B, C nu se mai află alte puncte (Pentru argumentare se utilizează măsura unghiului cu vârful pe cerc, în interiorul sau în exteriorul cercului). Dacă mai este şi alt punct D pentru care $\widehat{ADB}=\widehat{ACB}$, atunci şi punctul D se află pe cercul de mai sus.*

PRINCIPIUL INVARIANTULUI

Există o categorie de probleme în care se dă un anumit obiect (sau mai multe) asupra căruia se efectuează anumite transformări.
Se cere să se demonstreze că în urma acestor transformări obiectul nu poate fi adus la o anumită formă. Aceasta se poate face alegând caracteristica obiectului care nu se schimbă prin aceste transformări. O astfel de caracteristică se numeşte **invariantul transformării**.

Dacă obiectul final al problemei nu posedă această caracteristică, atunci el nu poate fi obţinut în urma transformărilor descrise.

1. ***Se dau trei numere $2, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$. a) După un pas este permisă scrierea a noi trei numere, înlocuind fiecare din numerele date prin semisuma celorlalte numere.***
Se poate, efectuând de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul $1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$?
b) După un pas este permis ca oricare două numere să se înlocuiască cu suma lor împărţită prin $\sqrt{2}$ şi diferenţa împărţită prin $\sqrt{2}$, lăsându-se al treilea număr neschimbat.
Se poate, efectuând de câteva ori această operaţie, să se obţină tripletul $1, \sqrt{2}, \frac{1}{\sqrt{2}}$?

R. *a) Dacă a, b, c sunt numerele date, atunci ele se înlocuiesc, după un pas, cu $\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+a}{2}$. Să observăm că în acest caz elementul care rămâne invariant este suma numerelor:*
$\frac{b+c}{2}+\frac{a+c}{2}+\frac{b+a}{2}=a+b+c.$
În cazul nostru suma numerelor iniţiale este $2+1+\sqrt{2}+1-\sqrt{2}=4$, iar suma numerelor finale este $1+2+\sqrt{2}+2-\sqrt{2}=5$.
Deci plecând de la numerele considerate $1, 1+\sqrt{2}, 1-\sqrt{2}$ nu se poate ajunge în final la numerele $1, 2+\sqrt{2}, 2-\sqrt{2}$.
b) Dacă a, b, c sunt numerele iniţiale, atunci după un pas ele se înlocuiesc cu $\frac{a+b}{\sqrt{2}}, \frac{a-b}{\sqrt{2}}, c$.
În acest caz **invariantul este suma pătratelor numerelor:**
$\left(\frac{a+b}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{a-b}{\sqrt{2}}\right)^2+c^2=a^2+b^2+c^2.$
În cazul nostru $a^2+b^2+c^2=2^2+(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=10$ în timp ce suma pătratelor numerelor finale este: $1^2+\sqrt{2}^2+(\frac{1}{\sqrt{2}})^2=\frac{7}{2}$. Cum $10\neq\frac{7}{2}$, răspunsul este negativ.

2. ***Dintr-o tablă de şah 8×8 se decupează două pătrate: cel de sus stânga şi cel de jos dreapta. Se poate acoperi cu pietre de domino (o piatră de domino acoperă două pătrate de pe tabla de şah), fără suprapunere, partea rămasă din tabla de şah ?***
R. *În problemele de acest fel la găsirea invariantului ne ajută o colorare cât mai bună a tablei. Observăm că fiecare piatră de domino acoperă o pătrăţică albă şi una neagră de pe tabla de şah. Dar din tablă au fost scoase două pătrate de aceeaşi culoare.*
Deci nu se poate acoperi.

Probleme propuse

1. ***Să se demonstreze inegalităţile:*** *1)* $(|a|+|b|)(|b|+|c|)(|c|+|a|)\geq 8|abc|$; *2)* $a^6+b^6+1\geq 3a^2b^2$ *3)* $\frac{a^6+b^6}{2}\geq 3a^2b^2-4$; *4)* $\frac{1}{2}(a+b)^2+\frac{1}{4}(a+b)\geq a\sqrt{b}+b\sqrt{a},\ a,b\geq 0$; *5)* $\sqrt{a^2+b^2+c^2}\leq |a|+|b|+|c|$; *6)* $1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)<n^n,\ n\in\mathbb{N}^*$.

2. ***Să se arate că pentru orice $a, b, c>0$ au loc inegalităţile:*** *1)* $ca+\frac{b}{c}\geq 2\sqrt{ab}$; *2)* $\frac{a+bc^4}{2c^2}\geq\sqrt{ab}$; *3)* $ab(a+b)+bc(b+c)+ac(a+c)\geq 6abc$; *4)* $\sqrt{(a+c)(b+d)}\geq\sqrt{ab}+\sqrt{cd}$; *5)* $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3$; *6)* $\frac{2}{b+c}+\frac{2}{c+a}+\frac{2}{a+b}\geq\frac{9}{a+b+c}$; *7)* $\frac{a+b}{c}+\frac{b+c}{a}+\frac{a+c}{b}\geq 6$; *8)* $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geq\frac{1}{\sqrt{bc}}+\frac{1}{\sqrt{ac}}+\frac{1}{\sqrt{ab}}$; *9)* $a^4+b^4+c^4\geq abc(a+b+c)$; *10)* $\frac{ab}{c}+\frac{bc}{a}+\frac{ac}{b}\geq a+b+c$.

3. Să se arate că:

1) dacă $|a|<1$, $|b|<1$, atunci $|a+b|<|1+ab|$;

2) dacă $a^2+b^2=1$, atunci $|a+b|\le\sqrt{2}$;

3) dacă $a>0$, $b>0$ şi $ab=1$, atunci $(1+a)(1+b)\ge 4$;

4) dacă $a+b+c\ge 3$, atunci $a^2+b^2+c^2\ge 3$;

5) dacă $a+b\ge c\ge 0$, atunci $a^2+b^2\ge\frac{c^2}{2}$, $a^4+b^4\ge\frac{c^4}{8}$, $a^8+b^8\ge\frac{c^8}{128}$;

6) dacă $a+b=1$, $a>0$, $b>0$, atunci $\sqrt{4a+1}+\sqrt{4b+1}\le 5$;

7) dacă a,b,c sunt lungimile laturilor unui triunghi, atunci $(a+b-c)(a-b+c)(b+c-a)\le abc$;

8) dacă $a,b>0$, $a+b>2$, atunci $a^2+b^2>2$;

9) dacă $x,y>0$, $x+y=1$, atunci $(1+\frac{1}{x})(1+\frac{1}{y})\ge 9$;

10) dacă $a_i>0$, $i=\overline{1,5}$, $a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=1$, atunci
$(\frac{1}{a_1}-1)(\frac{1}{a_2}-1)(\frac{1}{a_3}-1)(\frac{1}{a_4}-1)(\frac{1}{a_5}-1)\ge 1024$;

11) dacă $a_1=0$, $|a_2|=|a_1+1|$, $|a_3|=|a_2+1|$, atunci $\frac{a_1+a_2+a_3}{3}\ge-\frac{1}{2}$.

4. Să se arate că:

1) $(a+b+c)^3-(a^3+b^3+c^3)=3(a+b)(b+c)(c+a)$ şi apoi să se deducă inegalitatea $(a+b+c)^3\ge a^3+b^3+c^3$ pentru $a,b,c\ge 0$.

2) $a^3+b^3+c^3-3abc=\frac{1}{2}(a+b+c)[(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2]$ şi apoi să se deducă inegalitatea $a^3+b^3+c^3\ge 3abc$ dacă $a,b,c\ge 0$.

5. *Arătaţi că: a) $2\sqrt{k+1}-2\sqrt{k}<\frac{1}{\sqrt{k}}<2(\sqrt{k}-\sqrt{k-1})$, $k\in\mathbb{N}^*$.*

b) $2\sqrt{n+1}-2\sqrt{2}+1<1+\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{3}}+...+\frac{1}{\sqrt{n}}<2\sqrt{n}-1$, $n\in\mathbb{N}^*$.

6. *Arătaţi că dacă $a>b>0$, atunci $\frac{(a-b)^2}{8a}<\frac{a+b}{2}-\sqrt{ab}<\frac{(a-b)^2}{8b}$.*

7.* *Să se arate că sistemele de ecuaţii*

1) $\begin{cases}x^5y^3=81\\10x+6y=27\end{cases}$; *2)* $\begin{cases}x^4+y^4+z^4=1\\x^2+y^2+2z^2=\sqrt{7}\end{cases}$; *3)* $\begin{cases}x^3y=9\\3x+y=6\end{cases}$

nu admit soluţii reale.

8.* *Dacă a,b,c,a',b',c' sunt lungimile laturilor triunghiurilor ABC şi $A'B'C'$ şi dacă $\sqrt{aa'}+\sqrt{bb'}+\sqrt{cc'}=\sqrt{(a+b+c)(a'+b'+c')}$, atunci triunghiurile sunt asemenea.*

9.* *Dacă $a_i>0$, $i=\overline{1,n}$ şi $a_1+a_2+...+a_n=1$, atunci $\prod_{i=1}^{n}a_i(1-a_i)\le\frac{(n-1)^n}{n^{2n}}$.*

10.* *Aplicând inegalitatea mediilor demonstraţi inegalităţile:*

1) $1\cdot\frac{1}{2^2}\cdot\frac{1}{3^3}\ldots\frac{1}{n^n}<\left(\frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$; *2)* $1\cdot 2^2\cdot 3^3\cdot\ldots\cdot n^n<\left(\frac{2n+1}{3}\right)^{\frac{n(n+1)}{2}}$;

3) $\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)...(a_n+b_n)}\ge\sqrt[n]{a_1a_2...a_n}+\sqrt[n]{b_1b_2...b_n}$,
$a_i,b_i>0$, $i=\overline{1,n}$;

4) $\frac{1}{a_1}+\frac{2}{a_1+a_2}+\frac{3}{a_1+a_2+a_3}<2\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}\right)$, $a_1,a_2,a_3>0$;

5) $\frac{ab}{a+b}+\frac{bc}{b+c}+\frac{ca}{c+a}-1\le\frac{a^3+b^3+c^3}{6}$, $a,b,c>0$.

11.* ***Aplicând inegalitatea lui Bernoulli să se arate că*** $7^{85} > 6^{90}$.

12.* ***Dacă*** $x, y, z \geq 0$ ***şi*** $x + y + z = 1$, ***atunci*** $\dfrac{(x+1)^2}{y+1} + \dfrac{(y+1)^2}{z+1} + \dfrac{(z+1)^2}{x+1} \geq 4$.

(Inegalitate de tip Cebaşev cu $x + 1 = x_1$, $y + 1 = y_1$, $z + 1 = z_1$*).*