INDICAŢII ŞI RĂSPUNSURI

ALGEBRĂ

1. Elemente de logică matematică şi teoria mulţimilor

Mulţimea numerelor reale **pag. 29** 2. a) $\{1,5,9\}$; b) $\left\{-\frac{11}{4},-2,-\frac{3}{4},\frac{1}{2}\right\}$. 3. $[x]=2-\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow$ $\Rightarrow\sqrt{x}\in\mathbb{Z}\Rightarrow x=k^2,\ k\in\mathbb{N}\Rightarrow k^2+k-2=0$; $\{1\}$. 5. 1) $x\in[2,3)$, $y=[-3,-2)$; 2) $x=k+\frac{1}{3}$, $y=l+\frac{1}{2}$, $k,l\in\mathbb{Z}$; 3) $x=2,7$, $y=3,6$; 4) $x=1,1$, $y=3,5$. **pag. 70** 8. $\left[\frac{100}{2}\right]+\left[\frac{100}{2^2}\right]+\left[\frac{100}{2^3}\right]+\left[\frac{100}{2^4}\right]+\left[\frac{100}{2^5}\right]+\left[\frac{100}{2^6}\right]=$ $=97$; 23. 3) $a,b\in\mathbb{Q}\Rightarrow\frac{a+b}{2}\in\mathbb{Q}\cap[a,b]$, $a<b$; 6) $a-b=(\sqrt{a}-\sqrt{b})(\sqrt{a}+\sqrt{b})\Rightarrow\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$. Din $\sqrt{a}+\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$, $\sqrt{a}-\sqrt{b}\in\mathbb{Q}\Rightarrow\sqrt{a},\sqrt{b}\in\mathbb{Q}$; 7) Fie $\alpha\in\mathbb{Q}$ şi $\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}\in\mathbb{Q}$. Atunci $x_1=\alpha+\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}$, $x_2=\alpha-\sqrt{\alpha^2+\alpha+1}\in\mathbb{Q}$ verifică ecuaţia $x^2-2\alpha x-\alpha-1=0$. De aici $\alpha=\frac{x^2-1}{2x-1}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow 2x-1\,|\,x^2-1$; pentru $\alpha=0\Rightarrow 1\in\mathbb{Z}$. 25. a) Dacă $b\neq 0$, atunci $\sqrt{3}=-\frac{a}{b}\in\mathbb{Q}$, fals. Deci $b=0$ şi apoi $a=0$; b) Conform cu a) rezultă sistemul $2m+n-1=0$, $3m-2n=0$; c) $a=-6$, $b=12$; 27. Se ia $n=2k$, $k\in\mathbb{N}^*$, $n=2k+1$, $k\in\mathbb{N}$; 33. 1) Nu; 2) Da; $a=1+\sqrt{2}$, $b=1-\sqrt{2}$, de exemplu; 34. 1) Nu; 2) Da; de exemplu $a=1-\sqrt{3}$, $b=1+\sqrt{3}$, $ab=-2\in\mathbb{Q}$; 35. $\sqrt{e}\in\mathbb{Q}\Rightarrow(\sqrt{e})^2=e\in\mathbb{Q}$, fals. Deci $\sqrt{e}\notin\mathbb{Q}$; 36. 1) $5\in\mathbb{Q}$; 2) $-3\sqrt{3}\notin\mathbb{Q}$; 3),5),6) raţionale; 4) iraţional; 7) $n<\sqrt{n(n+1)}<n+1$; 8) $\sqrt{3}\ (n=1)$, $\sqrt{26}\ (n=4)$, $\sqrt{\ldots 2}\ (n\geq 5)$ nu sunt raţionale; pătratul unui număr natural nu se termină în cifra 2; 9) $n<\sqrt{n^2+1}<n+1$; $n=0$, $\sqrt{1}=1\in\mathbb{Q}$; $n\geq 1$, $\sqrt{n^2+1}\notin\mathbb{Q}$; 10) $\sqrt{n^2+3}=k\in\mathbb{N}\Rightarrow(k-n)(k+n)=3\Rightarrow(k-n=1,$ $k+n=3)\Rightarrow k=2$, $n=1$, $\sqrt{n^2+3}\in\mathbb{R}-\mathbb{Q}$, dacă $n\neq 1$, $n\in\mathbb{N}$. 37. 1) $1,2+\sqrt{5}>3$; 2) $\sqrt{7}<3$, $\sqrt{15}<4$; 5) $\sqrt{7}+\sqrt{2}>4$; 38. 1) 4; 2) 3; 3) 3; 40. Prin absurd, dacă fiecare cifră se repetă de un număr finit de ori, atunci după virgulă figurează un număr finit de cifre şi deci numărul ar fi raţional. Contradicţie!; 41. 1) $\frac{(x-1)(y-1)}{(x-1)+(y-1)-1}<0$; 3) $x\in(1,3)\Leftrightarrow|x-2|<1$; 4) $x\in[5,7]\Leftrightarrow|x-6|\leq 2$; 42. 1) $\frac{1}{a(a+1)}=$ $=\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1},\ldots;$; 5) $1+a^2=ab+bc+ca+a^2=(a+b)(a+c)$. 43. 1) ±1; 2) $x\in[-1,1]$; 3) $x\in(-\infty,-1)\cup(1,\infty)$; 4) $x\in(-2,-1)\cup(1,2)$; 5) $x\in(-2,-1]\cup[1,2)$; 6) $x\in[-2,-1]\cup[1,2]$; 44. a) 1) $-2,-4$; 2) $-\frac{3}{2}$; 3) ±3; 4) ±1; 5) $\frac{1}{2}$; 6) $\frac{1}{2}$; 7) $(-\infty,-1]$; 8) $1,-\frac{1}{2}$. b) 1) $\left[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right]$; 2) $\left(-\frac{2}{3},2\right)$; 3) $(-\infty,0]\cup[6,\infty)$; 4) $(-\infty,-2)\cup\left(\frac{2}{3},\infty\right)$; 5) $(-2,-1)\cup(1,2)$; 6) $(-1,0)\cup(2,3)$; 7) $\left(-\infty,-\frac{1}{2}\right)$; 8) $(-\infty,1]\cup[3,\infty)$; 9) $\mathbb{R}$; 10) $(0,2)$. 45. 1) $|x|<3$; 2) $|x|\geq 2$; 3) $|x-4|<2$; 4) $|x-16|\leq 4$; 5) $|x-5|<5$; 6) $|x-1|>4$; 46. 1) $5\leq 3x<6\Leftrightarrow\frac{5}{3}\leq x<2$; 2) $-2\leq 4x<-1\Leftrightarrow-\frac{1}{2}\leq x<-\frac{1}{4}$; 3) $5\leq 3+2x<6\Leftrightarrow 1\leq x<\frac{3}{2}$. 51. 3) $k<\sqrt{k(k+1)}<k+1\Rightarrow[\sqrt{k(k+1)}]=k$; 52. 1) $k=\left[\frac{x-1}{2}\right]$, $k\in\mathbb{Z}$, $k=\frac{x+3}{3}\Rightarrow x=3k-3$, $k\leq\frac{x-1}{2}<k+1\Leftrightarrow k\leq\frac{3k-4}{2}<k+1\Rightarrow k\in[4,6)\cap\mathbb{Z}$. Pentru $k=4\Rightarrow x_1=9$, iar pentru $k=5\Rightarrow x_2=12$; 2) $\left\{\frac{21}{2},13,\frac{31}{2},18,\frac{41}{2},23\right\}$; 3) $\{-8,-5\}$.

Calculul propoziţiilor **pag. 74** 1. 1) a; 2) f; 3) a. 2. 1) f; $\overline{p}$: „$2\leq 3$“. 3. 1) a; 2) – 5) f. 4. 1) $\{-1\}$; 2) $2-\frac{1}{x+2}\in\mathbb{Z}\Leftrightarrow x+2\in\{\pm1\}$; $\{-1,-3\}$; 3) $\emptyset$. 5. 1) a; 2) – 4) f; 5) – 7) a; 8) f. 6. 1) $\exists x\in\mathbb{R}$, $3x+1\leq 0$; a. 7. 1) $x\in(-1,\infty)$; 2) $x\in(-\infty,2]$; 3) $x\in(-\infty,2]\cup(-1,\infty)=\mathbb{R}$; 4) $x\in(-1,\infty)\cap(-\infty,2]=(-1,2]$. 9. Toate sunt adevărate. 10. 1) – 2) a; 3) f; 4) a. 11. 1) a; 2) – 3) f.

Mulţimi. **pag. 75** 1. Aplicaţi principiul includerii şi excluderii. 2. a) $n(E\cup A\cup R)=52$; b) $n(E)=8$, $n(A)=10$, $n(R)=12$, 8 persoane nu citesc nici un ziar; c) $8+10+12=30$ citesc exact un ziar. 3. Notăm cu A, B, C mulţimile de numere naturale $\leq n$ care se divid la 2, 3 şi respectiv 5. Atunci, $n(A)=\left[\frac{n}{2}\right]$, $n(B)=\left[\frac{n}{3}\right]$,

$n(C) = \left[\frac{n}{5}\right]$. Trebuie calculat $n(A \cup B \cup C)$. Pentru $n = 50$, $n(A) = 25$, $n(B) = 16$, $n(C) = 10$, $n(A \cap B) = 8$, $n(A \cap C) = 5$, $n(B \cap C) = 3$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ şi deci $n(A \cup B \cup C) = 36$. 4. $n(A) = m$, $n(B) = n$, $n(A \cap B) = p$. Din principiul includerii şi excluderii, rezultă $2p = m + n$ şi cum $0 \leq p \leq n$, $0 \leq p \leq m$, deducem $m = n = p$.

Metoda reducerii la absurd pag. 76 1. Prin reducerea la absurd; $\sqrt{3} = \frac{m}{n}$, $m, n \in \mathbb{N}^*, (m,n) = 1$. Din egalitate, rezultă $3n^2 = m^2$ şi deci 3 divide pe m. Fie $m = 3m_1$, $m_1 \in \mathbb{N}^*$. Avem: $n^2 = 3m_1^2$, adică 3 divide şi pe n, contradicţie (m, n au fost alese prime între ele)! 3. a) Dacă $b \neq 0$, atunci $\sqrt{3} = -\frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, fals. Deci, $b = 0$ şi apoi $a = 0$; b) Conform cu a) se obţine sistemul $2m + n - 1 = 0$, $3m - 2n = 0$; c) $a = -6$, $b = 12$. 4. a) Nu; prin reducere la absurd; b) Da, $a = 1 - \sqrt{2}$, $b = 1 + \sqrt{2}$ având $a + b = 2 \in \mathbb{Q}$. 5. Fie $d_1 \parallel d_2$ şi $d \cap d_1 = \{A\}$. Dacă, prin absurd, $d \cap d_2 = \emptyset$, adică $d \parallel d_2$, atunci $d \parallel d_1$, fals. 6. Fie $ABCD$ patrulaterul cu $m(\widehat{B}) + m(\widehat{D}) = 180°$. Dacă prin absurd, patrulaterul nu este inscriptibil, fie cercul care conţine punctele A, D, C şi taie latura $[AB]$ în E. Atunci $m(\widehat{AEC}) + m(\widehat{D}) = 180°$. Dacă $m(\widehat{AEC}) = m(\widehat{B})$, fals etc. 7. Dacă, prin absurd, oricare două segmente n-au puncte în comun, atunci suma lungimilor acestora ar fi strict mai mică decât 1, fals. 8. Dacă, prin absurd, oricare două arce n-au puncte comune, atunci ele nu pot avea suma lungimilor mai mare decât 2π! 10.* Prin reducere la absurd, presupunem că $\sum \frac{x_1}{y_1} < \sum x_1$. Adunând această relaţie cu cea din ipoteză rezultă $2\sum x_1 > \sum x_1 \left(y_1 + \frac{1}{y_1}\right) \geq 2\sum x_1$, deoarece $y_1 + \frac{1}{y_1} \geq 2$, contradicţie. 11.* Presupunem că cel mai mic dintre cele patru numere este strict mai mare decât $\frac{1}{4}$. Deci $a - b^2 > \frac{1}{4}, \ldots$, care adunate dau $\sum a - \sum a^2 > 1 \Leftrightarrow 0 > \sum \left(\frac{1}{2} - a\right)^2$, fals.

Metoda inducţiei matematice pag. 77 2. 1) $\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{(n+1)(n+2)}\right)$; 2) $\frac{1}{4}\left(\frac{1}{3} - \frac{1}{(2n+1)(2n+3)}\right)$; 3) $(n+1)! - 1$; 4) $(n+1)!(n+1) - 1$; 5) $1 - \frac{1}{(n+1)!}$; 6) $\frac{n(n+1)^2(n+2)}{4}$; 4. Inducţie matematică; 12) la pasul de inducţie grupăm $x_n + x_{n+1}$ şi folosim $(1 - x_n)(1 - x_{n+1}) \geq 1 - x_n - x_{n+1}$; 5. Inducţie matematică; 6. 1) $n \geq 2$; 2) $0, 1, n \geq 5$; 3) $0, n \geq 5$; 4) $n \geq 3$; 5) $n \geq 4$; 6) $n \geq 4$; 7) $n \geq 7$; 8) $n \geq 4$. 7. Inducţie matematică; 1) $\underbrace{33\ldots3}_{n} = \frac{1}{3}(10^n - 1)$; 2) $\underbrace{77\ldots7}_{n} = \frac{7}{9}(10^n - 1)$. 9. Inducţie matematică. 10. 7. 11. Inducţie matematică; 1) $S_n - 2S_{n-1} + 4S_{n-2} = 0$; 2) $S_n - 4S_{n-1} - 8S_{n-2} = 0$; 12. Inducţie matematică. 13. Inducţie. Presupunem că $f(k) = k$ pentru $k < n$, $n \geq 3$. Dacă n nu este prim, $n = k_1k_2$, atunci $f(n) = f(k_1)f(k_2) = n$. Dacă n este prim, atunci $n + 1$ nu este prim şi $f(n-1) < f(n) < f(n+1) \Rightarrow n - 1 < f(n) < n + 1 \Rightarrow f(n) = n$.

Teste de evaluare pag. 79

Testul 1. 1. c); 21 nu este prim. 2. $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 2, 3, 5\}$. 3. Inducţie matematică. 4. Se face o diagramă Venn, cu mulţimile F (cei care joacă fotbal), H (cei care joacă handbal) şi B (cei care joacă baschet). Avem: a) 5; b) 4; c) 2; d) 4; e) 6; f) 11; g) 23; h) 2. 5. O piatră de domino acoperă două pătrăţele din tabla de şah: una albă şi una neagră. Dar din tablă au fost scoase două pătrate de aceeaşi culoare. Deci nu se poate. **Testul 2.** 1. b). 2. $M = \{(2,3), (3,1), (1,5)\}$. 3. Inducţie matematică. 4. Se calculează $n(A \cap B \cap C) = n(A \cup B \cup C) - \sum n(A) + \sum n(A \cap B) = 36 - (18 + 20 + 25) + (9 + 11 + 12) = 5$. 5. $2m + m + 1 + (n-1)(m+2) = mn + 2(m+n) - 1$ părţi. **Testul 3.** 1. Suma de module este egală cu zero, dacă fiecare modul este nul. Deci, $x + y - 2 = 0$, $y - 3 = 0$, cu soluţia $x = -1$, $y = 3$; a) ; 2. $x = 2n - 1 + \frac{6}{2n+1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow 2n + 1$ divide pe 6, adică $2n + 1 \in \{\pm1, \pm2, \pm3, \pm6\}$; 4; 3. Inducţie matematică; 4) Dacă a, b, c sunt numerele date, atunci ele se înlocuiesc, după un pas cu $\frac{b+c}{2}, \frac{a+c}{2}, \frac{b+a}{2}$. Să observăm că suma acestor numere este $a + b + c$, adică aceeaşi cu a numerelor date. Această caracteristică (suma celor trei numere = constantă), se numeşte **invariantul** transformării. În cazul nostru, suma numerelor iniţiale este egală cu $2 + 1 + \sqrt{2} + 1 - \sqrt{2} = 4$, iar suma celor finale este egală cu 5. Deci, răspunsul este negativ. 5. Nu pentru că $1 + 2 + \ldots + 21 = 21 \cdot 11 =$ impar, iar în fiecare grupă suma este număr par. **Testul 4.** 1. a) Din $x + y = 4 \Rightarrow x^2 + 2xy + y^2 = 16$ iar din $x^2 + y^2 = 12$ deducem $xy = 2$. Avem $x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2) = 40$.

2. a) Din 1), $A \subset \{1,2,4,5\}$, $\{1,2,3\} \subset B$; din 2) $\Rightarrow \{2,5\} \subset A$ şi $B \subset \{1,2,3,4\}$. Din 3) $\Rightarrow 1 \in A$ şi $4 \in B$, iar din a doua $4 \notin A$. 3. b) Demonstraţi egalitatea prin inducţie; pentru precizarea răspunsurilor, particularizaţi pe n; dacă $n = 1$ şi se verifică b) şi c), iar dacă $n = 2$ se verifică a) şi b); deci răspuns comun este b). 4. c); pentru $n = 3$ obţineţi 7 regiuni, adică c); dacă a_n este numărul de regiuni determinat de n drepte, atunci încă o dreaptă mai determină $n+1$ regiuni noi. Deci $a_{n+1} = a_n + n + 1$. Punând aici $n = 1, 2, \ldots, n-1$ şi adunând, rezultă $a_n = 2+3+4+\ldots+n = 1 + \dfrac{n(n+1)}{2} = \dfrac{n^2+n+2}{2}$. 5. $m = 4$.

2. Funcţii

$\boxed{\textbf{pag. 91}}$ 1. 1) Nu, deoarece $f(0) = -7 \notin \mathbb{N}$; 2) Nu; $f(1) = \dfrac{2}{5} \notin \mathbb{Z}$; 3) Nu, $f(1) = 3 \notin [1,2]$. 2. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = \ldots 6$, $2^5 = \ldots 2$; $u(2^1) = 2$, $u(2^2) = 4$, $u(2^3) = 8$, $u(2^4) = 6$, $u(2^5) = 2$; $10 = 4 \cdot 2 + 2 \Rightarrow u(10) = u(2) = 4$; $u(n) = (6, n = 4k; 2, n = 4k+1; 4, n = 4k+2; 8, n = 4k+3; k \in \mathbb{N}^8)$; $S = 502 \cdot [u(1) + u(2) + u(3) + u(4)] = 502 \cdot 20 = 10040$. 4. 2) Se aplică 1) $\Rightarrow S = \dfrac{100}{101}$. 5. 2) Se aplică 1) $\Rightarrow S = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{101 \cdot 102}\right] < \dfrac{1}{4}$. 6. 1) Da, pentru că $f(-1) = 1 \in B$; $f(1) = 3 \in B$; 2) Nu, pentru că $f(1) = 4 \notin B$; 3) Trebuie ca $f(-1), f(1) \in B \Leftrightarrow (-1+m \in \{1,3,5\}$ şi $1+m \in \{1,3,5\}) \Leftrightarrow (m \in \{2,4,6\}$ şi $m \in \{0,2,4\}) \Rightarrow m \in \{2,4\}$. 7. Se aplică ecuaţiile $x^2 - 1 = 8$ (în $\mathbb{Z}$), $\dfrac{5x-1}{x+1} = 8$ (în $\mathbb{Q} - \mathbb{Z}$). Găsim $x = \pm 3 \in \mathbb{Z}$ şi respectiv $x = -3 \notin \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$. Deci $\{-3, 3\}$. 8. 1) $x^2 - 4 \neq 0 \Rightarrow x \neq \pm 2$; 2) $4 - 6 \geq 0 \Rightarrow x \leq 4$; 3) $4 - x > 0 \Rightarrow x < 4$; 4) $1 - x \geq 0$, $x \geq 0 \Rightarrow x \in [0,1]$; 5) $-x + 3 \geq 0$; $x^2 - 2x \neq 0 \Rightarrow (x \leq 3, x \neq 0, x \neq 2)$; 6) $x^2 - 1 \geq 0 \Rightarrow x \leq (-\infty, -1) \cup [-1, \infty)$, 7) $x - 1 \geq 0$ şi $x + 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$; 8) $1 - x \geq 0$, $1 + x \geq 0 \Rightarrow x \in [-1, 1]$. 9. $f(x) = |x-1| + x + 1 = x - 1 + x + 1 = 2x$. 10. $3+7+11 > 3+5+7$. 11*. $x = y = 0 \Rightarrow f(0) > -1$; $x = 1, y = -1 \Rightarrow f(0) < -1$. 12*. $y = -x \Leftrightarrow |f(0)| > |x|$, $\forall x$; $x = 2f(0) \Rightarrow |f(0)| < 0$. $\boxed{\textbf{pag. 93}}$ 2. $f(x) = g(x) \Rightarrow x \in \{1,2\} = A$. 3. $f(x) = g(x) \Rightarrow m = 2$. 4. $f(1) = g(1) \Rightarrow a + b = c + d$; $f(3) = g(3) \Rightarrow 3a + b = 3c + d$; $2a + (a+b) = 2c + (c+d) \Rightarrow 2a = 2c \Rightarrow a = c$, iar din prima relaţie $b = d \Rightarrow f = g$. $\boxed{\textbf{pag. 94}}$ 1. Pentru prelungirea g a lui f pe $\mathbb{R}$, trebuie să avem $f(-1) = g(-1) = -1$, $f(3) = g(3) = 7 \Rightarrow a = 2$, $b = 1$. 2 1) $5x - 1 < 0 \Rightarrow x < \dfrac{1}{5}$, $f_1 : \left(-\infty, \dfrac{1}{5}\right) \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 5x - 1$; 2) $5x - 1 \geq 4 \Rightarrow x \geq 1 \Rightarrow f_2 : [1, \infty)$, $f_2(x) = 5x - 1$. 3. $f_{|\mathbb{Z}}(x) = 1$, $f_{|\mathbb{Q}-\mathbb{Z}}(x) = 2$ $f_{|\mathbb{R}-\mathbb{Q}}(x) = 3$. 4. $x \neq 1$, $g(x) = x + 1 = f(x)$, $h(x) = \dfrac{(x+1)(x-1)}{x-2} = x + 1 = f(x)$. 5. Dacă $x \geq 1$, atunci $|x - 1| = x - 1 \Rightarrow g(x) = f(x)$. 6. Se explicitează modulele. Găsim $f_1 : [-1, 1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = 2 = f(x)$, $x \in [-1, 1]$. 7. Se ridică la pătrat, se transformă diferenţele de pătrate în produse. Se face produsul lor. 8*. Se face $x = -\dfrac{1}{2}$. 9*. Prin reducere la absurd. Se aleg $x, y > 0$ a.î. $x + a \geq 0$, $x + y + b \geq 0$, $y + c \geq 0 \Leftrightarrow a + b + c > 0$. Se aleg $x, y < 0$ a.î. $x + a \leq 0$, $x + y + b \leq 0$, $y + c \leq 0 \Rightarrow a + b + c < 0$. 10*. Unul din intervalele $[0, a]$, $[a, b]$,…,$[d, 1]$ are lungimea $\geq 0,2$. Se ia x centrul acestui interval $\Rightarrow |x - a| \geq 0,1$, $|x - b| \geq 0,1$ $l([a,b]) \geq 0,2)$, $|x - c| > 0,1$, $|x - d| > 0,1$.

$\boxed{\textbf{pag. 98}}$ 1. 1) $x_{60} = 197$; $x_{81} = 260$; 2) $x_{21} = -841$; $x_{10} = -190$; 3) $x_2 = \dfrac{17}{26}$; $x_9 = \dfrac{21}{32}$; 4) $x_{16} = 3\sqrt{2} - 4$; $x_{18} = 2\sqrt{5} - 3\sqrt{2}$. 2 1) $x_3 = \dfrac{13}{6}$, $x_4 = \dfrac{19}{6}$; 2) $x_n = \left(\sqrt{2}\right)^{n-1}$; $x_{16} = 128\sqrt{2}$. 3. a) 1) $2n$, $n \in \mathbb{N}^*$; 2) $(-1)^n 5$, $n \in \mathbb{N}^*$; 3) $1 + (-1)^n$; 4) $\dfrac{n}{n+1}$, $n \geq 1$; 5) $\dfrac{2n}{(2n-1)(2n+1)}$, $n \geq 1$; 6) $\left[\dfrac{n+1}{2}\right]$, $n \geq 1$; b) 1) $a_n = \dfrac{n(n+1)}{2}$; 2) $a_n = n^2 - n + 2$; 3) $a_n = 1 + \dfrac{(n-1)n(2n-1)}{6}$; 4) $a_n = \dfrac{1}{2}(3^n - 1)$; 5) $a_{n+1} = \dfrac{n}{n+1} a_n$, $a_n = \dfrac{1}{n}$; 6) $\dfrac{n}{(n+1)!} = \dfrac{n+1-1}{(n+1)!} = \dfrac{1}{n!} - \dfrac{1}{(n+1)!}$; $a_n = \dfrac{3}{2} - \dfrac{1}{(n+1)!}$; 7) $\dfrac{1}{(n+1)n(n-1)} = \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{n(n-1)} - \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$; $x_n = x_1 + \dfrac{1}{2}\left[\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{n(n+1)}\right]$. 4. $a_n = \sqrt{2 + a_{n-1}}$, $n \geq 2$. $a_1 = \sqrt{2}$. 6. $a_n = 2n$. 7. Se rescrie relaţia sub forma $a_{n+1} - a_n = 2 + a_n - a_{n-1}$, unde notăm $b_n = a_n - a_{n-1}$; relaţia $b_{n+1} = b_n + 2$, conduce la $b_n = 2n - 3$, iar $a_n - a_{n-1} = 2n - 3$ conduce la $a_n = n^2 - 2n + 2$. 9. $b_n = \dfrac{1}{(n+2)(n+3)} = \dfrac{1}{n+2} - \dfrac{1}{n+3}$.

$\boxed{\textbf{pag. 101}}$ 1. 1) $0 < x_n < 5$; 2) $|x_n| < 1$; 3) $|x_n| < 2$ 4) $|x_n| < 1$ 5) $0 < x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)} + n} < \dfrac{1}{2n} \leq \dfrac{1}{2}$;

6) $\frac{1}{3} = \frac{m}{3n} < x_n < \frac{n}{2n+1} < 1$; 7) $0 < x_n < \frac{n^2}{n^2+1} < 1$; 8) $0 < x_n < \frac{1+2+\ldots+n}{n^2+1} = \frac{n(n+1)}{2(n^2+1)} < 1$; 9) $\frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+n^2} < x_n < \frac{1^2+2^2+\ldots+n^2}{n^3+1}, \sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; 10) $0 < x_n < \frac{n}{\sqrt{n^2+1}} < 1$; 11) $\sum_1^n k(k+1) = \sum_1^n k^2 + \sum_1^n k$; 12) $\left[\sqrt{k(k+1)}\right] = k$; 13) $\frac{1}{k(k+1)(k+2)} = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{k(k+1)} - \frac{1}{(k+1)(k+2)}\right]$, $0 < x_n < \frac{1}{4}$; 14) $0 < x_n < 1 + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{1}{(n-2)(n-1)n}$; $0 < x_n < 2$; 15) $\frac{1}{k!} < \frac{1}{(k-1)k} = \frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}$; $2 < x_n < 3$; 16) $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{k+1-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$; $0 < x_n < 1$; 17) $\frac{1}{k!+(k+1)!} = \frac{1}{k!(k+2)} = \frac{k+1}{(k+2)!} = \frac{1}{(k+1)!} - \frac{1}{(k+2)!}$; $0 < x_n < \frac{1}{2}$; 18) $1 < x_n < \frac{3}{2}$; 19) $0 < x_n < 1$; 20) $0 < x_n < 2$; 21) $0 < x_n < 2$; 22) $0 < x_n < 9\left(\frac{3}{4}\right)^n \le \frac{27}{4}$; 23) $0 < 1 - \frac{1}{3^k} < 1 \Rightarrow 0 < x_n < 1$; 24) $0 < \frac{2k-1}{2k} < 1 \Rightarrow 0 < x_n < 1$;

25) $0 < x_n = \frac{2(n^2+n+1)}{3n(n+1)} < 1$. 2. 1) $x_n < -n$; 2) $x_n > \frac{n}{3}$; 4) $x_n > 2^n > n, \forall n \ge 3$; 5) $x_n \ge \frac{n}{\sqrt{n}} = \sqrt{n}$; 6) Se amplifică fiecare fracţie cu expresia conjugată; $\frac{1}{\sqrt{k}+\sqrt{k+1}} = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$; $x_n = \sqrt{n+1} - 1$. 3. 1) $0 < x_n < 3$, inducţie; 2) $1 < x_n < 3$, inducţie; 3) $2 < x_n < 3$, inducţie. 4. 1) $x_{n+1}^2 = x_n^2 + \frac{1}{x_n^2} + 2 > x_n^2 + 2 \Rightarrow x_1^2 > x_0^2 + 2$, $x_2^2 > x_1^2 + 1, \ldots, x_n^2 > x_0^2 + 2n \Rightarrow x_n^2 > 2n+4 \Rightarrow x_n > \sqrt{2n+4}$. 5. b) Se aplică a) şi rezultă $0 < x_n < 2 - \frac{2}{\sqrt{n+1}} < 2$.

pag. 104 1. 1) $(x_n) \nearrow$; 2) $(x_n) \searrow$; 3) $(x_n) \searrow$; 4) $(x_n) \nearrow$; 5) $1^2 + 2^2 + \ldots + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$; $(x_n) \nearrow$; 6) $(x_n) \nearrow$; 7) $(x_n) \nearrow$; 8) $\sum_{k=1}^{n} k(k+1) = \sum_{k=1}^{n} k^2 + \sum_{k=1}^{n} k$; $(x_n) = \frac{(n+1)(n+2)}{3n^2}$; 9) $(x_n) \nearrow$; 10) $(x_n) \searrow$; 11) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = 1 + \frac{1}{2^{n+1}} > 1$; 12) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$; 13) $x_n = \prod_{k=2}^{n} \frac{k-1}{k} \prod_{k=2}^{n} \frac{k+2}{k} = \frac{n+2}{3n}$; 14) $x_n = \frac{1+2n}{1-2n}$; 15) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{4n+4}{4n+5} < 1$; 16) $x_n = \prod \frac{(k-1)(k+2)}{k(k+1)}$; $x_n = \frac{n+2}{3n}$. 3. 1) $\alpha > 0 \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; $\alpha < 0 \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; $\alpha = 0$, $x_n = \frac{1}{2}, \forall n$; 2) $\alpha > 0 \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; $\alpha = 0$, $x_n = 0, \forall n$; $\alpha < 0 \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; 3) ($\alpha < 0 \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; $\alpha = 0$, $x_n = 0, \forall n$; $\alpha > 0 \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; 4) $\alpha > 3 \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; $\alpha = 3$, $x_n = 1, \forall n$; $\alpha < 3 \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; 4. 1) $x_{n+1} - x_n = -x_n^2 < 0, \forall n$; 2) $(x_n) \nearrow$; 3) $(x_n) \nearrow$; 4) $(x_n) \nearrow$; 5) $\frac{x_{n+1}}{x_n} = \frac{n+1}{n} > 1$; 6) $(x_n) \searrow$; 7) $x_2 - x_1 = \frac{x_1(\alpha - x_1)}{\alpha + x_1}$; $x_1 > 0 \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; $x_1 = \alpha \Leftrightarrow x_n = \alpha, \forall n$; $x_1 < \alpha \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; 8) $x_2 - x_1 = \frac{\alpha - x_1^2}{2x_1}$; $x_1 > \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (x_n) \searrow$; $x_1 = \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow x_n = \sqrt{\alpha}, \forall n$; $x_1 < \sqrt{\alpha} \Leftrightarrow (x_n) \nearrow$; 9) $x_1 = 0 < x_1 = \sqrt{6} > x_2 = \sqrt{6 - \sqrt{6}}$, adică şirul nu este monoton.

pag. 117 1. 1) $\{(-2,4),(-1,1),(0,0),(1,1),\}$; 2) $\{x\} = x - [x]$; $\left\{\left(-\frac{2}{3},\frac{1}{3}\right);\left(\frac{1}{5},\frac{1}{5}\right);\left(2\frac{1}{4},\frac{1}{4}\right);\left(\frac{7}{3},\frac{1}{3}\right);\right.$ $\left.(5,(2);0,(2))\right\}$. 2. $f(2) = 3 \Rightarrow m = 1$. 3. $f(m+1) = m - 1 \Rightarrow m \in \{-1,2\} \Rightarrow f_1(x) = -x, +4$, $f_2(x) = 2x - 2$. 4. $f(-1) = 2$, $f(2) = 5 \Rightarrow a = 1$, $b = 3 \Rightarrow f(x) = x + 3$; $(-2,1) \in G_f$ deoarece $f(-2) = 1$; $(0,5) \notin G_f$, $(3,6) \in G_f$. 5. $-1 \le f(x) \le 1, \forall x$. 6. Elementul 1 are două imagini $\Rightarrow f$ nu este funcţie. 7. Sistemul $f(-1) = 1$, $f(0) = 3$, $f(1) = 5$ are soluţia $a = 0$, $b = 2$, $c = 3$, fals. 8. Prin reducere la absurd. Punem $x = 0$ în relaţie şi apoi $x = 1$. Se obţine $f(0) + f(1) = 1$, $f(1) + f(0) = 2$, adică $1 = 2$! 9. $f(-1) = 2$, $f(2) = 6 \Rightarrow -a - b + 1 = 2$ şi $4a - 6b = 6 \Rightarrow a = 0$, $b = -1$. **pag. 121** 1. 1) $y = \operatorname{Im} f$ dacă există $x \in \mathbb{Z}$ astfel încât $f(x) = y$; $-8 \notin \operatorname{Im} f$, $-6 = f(-2) \in \operatorname{Im} f$, $15 = f(5) \in \operatorname{Im} f$, $53 \notin \operatorname{Im} f$; 2) $A = \{-2,-1,0,1,2\} \Rightarrow f(A) = \{-6,-3,0,3,6\}$; 3) $x \in f^{-1}(B)$ dacă $f(x) \in B$; $f(x) = 3x = -24 \Rightarrow x = -8$; $3x = -9 \Rightarrow x = -3$; $3x = 18 \Rightarrow x = 6$; $3x = 24 \Rightarrow x = 8 \Rightarrow f^{-1}(B) = \{-8,-3,6.8\}$. 2 1) $\operatorname{Im} f = \{0,1\}$; 2) $f(A_1) = \{1\}$; $f(A_2) = \{0,1\}$; 3) Pentru $k \in \{1,4,9\}$, $\sqrt{k} \in \{1,2,3\} \Rightarrow f(\sqrt{k}) = 1$; 6. 3. 1) $f(A) = \{2\}$; 2) $f(A) = \{1,2\}$; 3) $f(A) = \{1,2,3\}$; 4) $f^{-1}(\{1\}) = \mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{2\}) = \mathbb{Q} - \mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{3\}) = \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $f^{-1}(\{1,2\}) = \mathbb{Q}$, $f^{-1}(\{1,3\}) = \mathbb{Z} \cup (\mathbb{R} - \mathbb{Q})$;

$f^{-1}(\{2,3\}) = \mathbb{R} - \mathbb{Z}$; $f^{-1}(\{1,2,3\}) = \mathbb{R}$. 4. 1) Im $f = \{-3,-2,-1,0,1,,2,3\}$; 2) $f^{-1}(\{-3\}) = [-3,-2)$, $f^{-1}(\{-3,-2\}) = [-3,-1)$, $f^{-1}(\{-3,0\}) = [-3,0)$, $f^{-1}(\{-2,1\}) = [-2,-1) \cup [1,2)$; 3) Prima şi a patra pereche. 5. Avem două posibilităţi ($f(0) = -1$ şi $f(3) = 5$), ($f(0) = 5$, $f(3) = -1$), când $f(x) = 2 - x$ şi respectiv $f(x) = -2x + 5$. 6. 1) Ecuaţia $f(x) = -1$ are soluţia $x = 0 \notin (1,\infty)$; 2) $\frac{x+1}{x-1} = y \Rightarrow x = \frac{1+y}{1-y}$, $y \neq 1$; $x > 1 \Rightarrow \frac{1+y}{y-1} > 1 \Rightarrow \frac{2}{1-y} > 0 \Rightarrow y \in (1,\infty) \Rightarrow$ Im $f = (1,\infty)$; 3) $f(x) = 0 \Rightarrow x = -1 \notin (1,\infty)$, $f(x) = \frac{1}{2} \Rightarrow$ $\Rightarrow x = -3 \notin (1,\infty) = f^{-1}\left(\left\{0,\frac{1}{2}\right\}\right) = \emptyset$; $f^{-1}(\{2,3\}) = \{3,2\}$. 7. ($f(-2) = 2$ şi $f(1) = 5$) sau ($f(-2) = 5$ şi $f(1) = 2$) $\Rightarrow f(x) = x+4$ sau $f(x) = -2x+5$. 8. Im $f = [5,9]$, $g(a) = 5$, $g(b) = 9 \Rightarrow a = 1$, $b = \frac{7}{3}$. 9. $f([-2,5]) = f([-2,0]) \cup f((0,3])$. **pag. 122** 1. 1) $D_f = [-2,2]$; 2) $D_f = [-2,-1] \cup [1,2]$; 3) $D_f = (-\infty,-1] \cup [1,\infty)$. 2. 1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R} - \{1\}$; 3) $\mathbb{R} - \{-1,0\}$; 4) $\mathbb{R} - \{0,2\}$; 5) $(-\infty,2]$; 6) $[0,\infty)$.
3. 1) $\{-7,1,5,13\}$; 2) $\{-1,0,1,2,3,4\}$; 3) $[0,1]$; 4) $[-2,\infty)$; 5) Utilizaţi $f(A \cup B \cup C) = f(A) \cup f(B) \cup f(C)$. 4. $f(x) = |x-2|$; $f(x) = 2 - x$ dacă $x \leq 2$. 5. 1) $D_f = [1,\infty)$, $D_g = [|m|,\infty) \Rightarrow m = \pm 1$; 2) $[1,\infty)$. 6. $f(\mathbb{Z}) = \{0,1,2,\dots,6\}$, $S = 287(1+2+3+4+5+6) = 6027$. **pag. 123** 1. 1) $(0,-2)$, $\left(\frac{2}{3},0\right)$; 4) $(0,3)$, $G_f \cap Ox = \emptyset$; 9) $|x-1|(1+|x|)$; $(0,1)$, $(1,0)$; 11) $\left(0,\frac{1}{2}\right)$; $G_f \cap Oy = \emptyset$; 16) $(0,-3)$, $G_f \cap Oy = \emptyset$; 17) $(0,-1)$, $(-1,0)$, $(1,0)$, $(3,0)$. 2 1) $a = b = 3$; 2) $a = 1$, $b = 0$. 3. 1) $(0,1)$, $(1,1)$, $(2,1)$; 2) aceleaşi. 4. 1) $a = \pm 3$; 2) $a \in \{0,2\}$. **pag. 126** 1. 1) $x = 2$; 2) $x = 3$; 3) $x = 2$; 4) $x = 2$; 5) $x = \frac{1}{2}$; 6) $x = 0$. 3. $3a = 3 \Rightarrow a = 1$.
4. Nu pentru $\forall x \in \mathbb{R}$ are loc relaţia $f(1+x) + f(1-x) = 6$. **pag. 129** pară: 1), 4), 5), 6), 8), 9), 10); restul impare. 2. $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow f(-x) + f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \sum = 0$, $f(0) = 0 \Rightarrow \prod = 0$. 3. Punem în relaţia dată $(-x)$ în locul lui x şi se scad relaţiile. Rezultă $f(-x) = f(x)$, $\forall x \Rightarrow f$ pară; $x = 0$ în relaţie dă $f(0) = 0 \Rightarrow \prod = 0$. 4. $-x \to x$ în relaţie şi se adună $\Rightarrow f(-x) = -f(x)$, $\forall x$, $x = 0 \Rightarrow f(0) = 0$. 5. $A'(-a,b)$ este simetricul lui $A(a,b)$ şi în raport cu Oy; $A'(a',b')$ este simetricul lui $A(a,b)$ în raport cu $M(x_0,y_0) \Leftrightarrow \left(x_0 = \frac{a+a'}{2}, y_0 = \frac{b+b'}{2}\right) \Leftrightarrow (a' = 2x_0 - a, b' = 2y_0 - b)$. **pag. 131** 1. $2^1 = 2$, $2^2 = 4$, $2^3 = 8$, $2^4 = 26$, $2^5 = 2^4 \cdot 2 = \dots 2 \Rightarrow f(2) = 2$, $f(4) = 4$, $f(8) = 8$, $f(16) = 6$, $f(32) = 2 \Rightarrow f(4k) = 6$, $f(4k+1) = 2$, $f(4k+2) = 4$, $f(4k+3) = 8$, $k \in \mathbb{N}^* \Rightarrow f(n+4) = f(n)$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $T_0 = 4$; $\sum_{k=1}^{100} f(k) = 25(f(1)+f(2)+f(3)+f(4)) = 25 \cdot 20 = 500$; 2. $f(5k) = 0$, $f(5k+1) = 1$, $f(5k+2) = 2$, $f(5k+3) = 3$, $f(5k+4) = 4$, $T_0 = 5$; $\sum_{k=-100}^{100} f(k) = 40(0+1+2+3+4) = 400$. 3. $x \in \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = f(x) = 1$; $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $T \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = f(x) = 2$; $T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z}$, $x \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + T \in \mathbb{R} - \mathbb{Z} \Rightarrow f(x+T) = 2 \neq 1 = f(x)$; $T_0 = 1 \in \mathbb{Z}$; $S = 10 + 2 \cdot 90 = 190$; 4. Ca la 3. 5. $T \in \mathbb{Q}^*$ este perioadă ($T \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$ nu este! – verificare prin calcul $f(x+T) \neq f(x)$ pentru $x \in \mathbb{Q}$). Cum în $\mathbb{Q}_+^*$ nu există cel mai mic element, nu avem T_0. 6. $T \in \mathbb{Z}$ şi $T_0 = 1$. 7. $\frac{10}{3} = 2 + \frac{4}{3} \Rightarrow f\left(\frac{10}{3}\right) = f\left(\frac{4}{3} + 2\right) = f\left(\frac{4}{3}\right) = 4 - 2 = 2$; $-\frac{39}{5} = -7 - \frac{4}{5} = -8 + 1 - \frac{4}{5} = -8 + \frac{1}{5} \Rightarrow$ $f\left(-\frac{39}{5}\right) = f\left(\frac{1}{5} + 2(-4)\right) = f\left(\frac{1}{5}\right) = \frac{3}{5} - 2 = -\frac{7}{5}$; $S = 50[f(0) + f(1)] = -50$. 8. $\{x+n\} = \{x\}$, $\forall x \in \mathbb{Z}$.
9. 1) $[x] = \left[x + \frac{1}{3}\right] = \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x] = 0$; 2) $f\left(x + \frac{1}{3}\right) = \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] + [x+1] - [3x+1] = f(x)$, deoarece $[x+1] = [x] + 1$, $[3x+1] = [3x] + 1$; 3) $f \equiv 0$. **pag. 145** 2. $2x + 3 = 3 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow f(3) = -1$; $2x + 3 = -1 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow f(-1) = 7$; $y = 2x + 3 \Rightarrow x = \frac{y-3}{2} \Rightarrow f(y) = 4 \cdot \frac{y-3}{2} - 1 = 2y - 7$. 3. 1) În relaţia dată se înlocuieşte x cu $1 - x \Rightarrow f(x) - 2f(1-x) = 6x - 7$ şi se rezolvă sistemul de necunoscute $f(x)$, $f(1-x)$; $f(x) = 2x + 3$; 2) $\frac{1}{x} \to x$, $f(x) = \frac{5}{x}$, $x \neq 0$, $f(0) = c \in \mathbb{R}$. 4. $m = -1$. 5. 1) $g([a,b]) = [2a-3, 2b-3] \subseteq$ $\subseteq [-3,2] \Rightarrow (2a - 3 \geq -3, 2b - 3 \leq 2) \Rightarrow \left(a \geq 0, b \leq \frac{5}{2}\right)$; 2) $f([-3,2]) = [-8,7] \subseteq [a,b] \Rightarrow a \leq -8$; $b \geq 7$.

6. $h(x) = x^2$, $g(x) = \dfrac{x}{x^2+1}$. 7. $a^2x+ab+b = 4x+3 \Rightarrow (a^2 = 4, ab+b = 3) \Rightarrow (a = -2, b = -3$ sau $a = 2, b = 1)$. 8. $a = 1$, $b = 0$. 9. $2g(x) - 3 = 2x^2 - 4x + 1 \Rightarrow g(x) = x^2 - 2x + 2$; 10. $g(3x+1) = 4x - 5$, $y = 3x + 1 \Rightarrow x = \dfrac{y-1}{3} \Rightarrow g(y) = \dfrac{4y-16}{3}$. 11. $f\circ g = f\circ(f\circ f) = (f\circ f)\circ f = g\circ f \Rightarrow 1)$; 2) Se pune $x = 1$ în 1) $\Rightarrow (f(1)-1)^2 = 0 \Rightarrow f(1) = 1$. $\boxed{\text{pag. 148}}$ 2. 1) $a = -1$, $b = 1$; 3) $a = b = 2$. 3. $m = -6$. 4. 1) Nu; 2) $f(x) = 3x + 2$. 5. 1) Da, $f(x) = 2 - 3x$; 2) Nu. 6. 1) 4; 2) $-\dfrac{5}{2}$; 4) nedefinită. 7. $m = \operatorname{tg}\alpha$; 1) 0; 2) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}$; 4) nu există; 5) $m = -\sqrt{3}$. 8. 1) $m = -\sqrt{3}$; 2) $m = 2$; 5) $y = -2x + 1$, $m = -2$; 6) $m = 0$; 7) Nu este definită; 8) $m = -\dfrac{2}{3}$. 9. $\dfrac{2m+1}{3m-1} = 3$; $m = \dfrac{4}{7}$. 10. 1); 2); 5). 11. $f(-2) = 1 = g(-2)$; $a = 1$; $b = 5$. 12. 1) $1 - 2m = 3m - 4$, $4m = 2 + 2m \Rightarrow m = 1$; 2) $1 - 2m = 0 \Rightarrow m = \dfrac{1}{2}$; 3) $m = 1$. 13. 1) $m = 1 \Rightarrow f(x) = -1$; 2) $m(x+2) - x - y - 3 = 0 \Rightarrow x + 2 = 0$, $x + y + 3 = 0 \Rightarrow (-2, -1)$. 14. $A(3,0)$, $B(0,4)$ şi $AB = 5$, $S = 6$, $P = 3 + 4 + 5 = 12$. 15. $a\sqrt{3} + b\sqrt{2} = \sqrt{2} \Leftrightarrow a\sqrt{3} + \sqrt{2}(b-1) = 0 \Rightarrow a = 0, b = 1 \Rightarrow f(x) = 1$. 17. $m = \dfrac{1}{2}$, $n = -6$. 18. 1) $y - y_0 = m(x - x_0)$, $A(x_0, y_0) \Rightarrow$ a) $y - 2 = 3(x - 1)$; 2) a) $A(-2,3)$, $m = -\dfrac{1}{2} \Rightarrow y - 3 = -\dfrac{1}{2}(x+2)$

Aplicaţii practice. 1. $G_s \cap O_t$: $s = 0 \Rightarrow t = 5h$ (după 5 ore este parcursă distanţa Bucureşti-Blaj); $G_s \cap O_t$: $t = 0 \Rightarrow s(0) = 400$, este distanţa de parcurs la momentul $t = 0$. 2. Reperul tOS. $G_S \cap OS : t = 0 \Rightarrow S(0) = 1000$ este suma iniţială din cont. $G_S \cap Ot : S = 0 \Rightarrow t = 20$ de luni (sau retrageri) pentru a goli contul. 3. Reperul xOT; $G_t \cap OT : x = 0 \Rightarrow T(0) = -6$ este temperatura pe care o are cana în frigider înainte de a fi scoasă; $G_T \cap Ox$: $T = 0 \Rightarrow x = 2$, adică după două minute de la scoaterea cănii din frigider aceasta va avea temperatura 0° C. 4. Reperul tOh : $G_h \cap Oh : t = 0 \Rightarrow h(0) = 2800$ este înălţimea la care se află paraşutistul înaintre de deschiderea paraşutei; $G_h \cap Ot : h = 0 \Rightarrow t = 280s$ este timpul necesar pentru a atinge pământul. 5. Reperul xOy. Este clar că $y \geq 0 \Rightarrow x \geq \dfrac{30}{7}$; $G_y \cap Ox : y = 0 \Rightarrow x = \dfrac{30}{7} \approx 4,2$, înseamnă că la 4,2°C, greierul nu produce sunete; $T(x) = 117 \Rightarrow x = 21$°C. 6. $y - 2005 = 2000(x - 15000)$; 7. q =cantitatea, p = preţul/unitate, (q,p) : $(100,58), (200,51)$; $p = -\dfrac{7}{100}q + 65$. 8. 1) (z,g) : $(0,40)$, $(25,675)$, $g - 40 = \dfrac{127}{5}z$; 2) $z = 10 \Rightarrow g = 294$ gr. 9. 1) $n(a) = 132$, $N(a) = 172$. $\boxed{\text{pag. 151}}$ 1. 1), 3) $f \nearrow$; 2), 4) $f \searrow$; 5) $m > 2 \Rightarrow f \nearrow$; $m < 2 \Rightarrow f \searrow$; $m = 2 \Rightarrow f(x) = 0$, $\forall x$, funcţie constantă. 2. 1) $2 < 5 \Rightarrow f(2) < f(5) \Rightarrow f \nearrow$; $2 < 4 < 5 \Rightarrow f(2) < f(4) < f(5)$, $-100 < 100 \Rightarrow f(-100) < f(100)$; 2) $1 < 4 \Rightarrow f(1) = 13 > f(4) = 9 \Rightarrow f \searrow$; $1 < 3 < 4 \Rightarrow f(1) = 13 > f(3) > f(4) = 9$; 3) $f(2) = 3 \Rightarrow 2 = f^{-1}(3)$, $f(5) = 9 \Rightarrow 5 = f^{-1}(9)$; $2 < 5 \Rightarrow f(2) < f(5) = f \nearrow$; $f^{-1}(6) = x$ astfel încât $f(x) = 6$; $3 < 6 < 9 \Leftrightarrow f(2) < f(x) < f(5) \Rightarrow 2 < x < 5$. 3. 1), 3) $f \nearrow$; 2) $f \searrow$; 4) Nu; $-1 < -\dfrac{1}{2} \Rightarrow f(-1) = 2 = f\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 2!$ 4. $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 4$, $-2 \leq y \leq 2 \Rightarrow -6 \leq 3y \leq 6 \Rightarrow -10 \leq 2x + 3y \leq 10 \Rightarrow -14 \leq 2x + 3y - 4 \leq 14$. 5. 1) $f((-2,-1)) = \{-1\}$, $f([-1,1)) = \{1\}$, $f((-2,-1)) = \{-1,1\}$, $\operatorname{Im} f = \{-1,1\}$; 2) Pe $[-2,1]$ $f \searrow \Rightarrow f([-2,1)) = (f(1), f(-2)] = (0,3]$; Pe $(1,3]$ $f \nearrow \Rightarrow f((1,3]) = (f(1), f(3)] = (1,5]$; $[-2,3] = [-2,1] \cup (1,3] \Rightarrow f([-2,1)) \cup (1,3]) = f([-2,1]) \cup f((1,3]) = [0,3] \cup (1,5] = [0,5]$. 6. $f \nearrow$ dacă $m > 0$; $f(m) = 2m \Rightarrow m^2 - 2m - 3 = 0$ cu soluţiile $m_1 = -1$, $m_2 = 3$. Reţinem $m = 3$.

$\boxed{\text{pag. 153}}$ 2. a) 3) Tabelul de semn este

x	$-\infty$		-1		2		$+\infty$
$x+1$	$-$	$-$	0	$+$	$+$	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$(x+1)(x-2)$	$+$	$+$	0	$-$	0	$+$	$+$

deci, $f(x) > 0$, dacă $x \in (-\infty,-1) \cup (2,\infty)$; $f(x) < 0$ dacă $x \in (-1,2)$; $f(x) = 0$, dacă $x \in \{-1,2\}$.

b) 3) Tabelul de semn este

x	$-\infty$		-1	1		$+\infty$	
$1-x$	$+$	$+$	$+$	0	$-$	$-$	
$x+2$	$-$	$-$	$-$	-0	$+$	$+$	$+$
$\dfrac{1-x}{x+1}$	$-$	$-$	$-\vert$	$+0$	$-$	$-$	

Deci, $f(x) < 0$, dacă $x \in (-\infty,-1) \cup (1,\infty)$; $f(x) > 0$ dacă $x \in (-1,1)$; $f(x) = 0$, dacă $x = 1$.

$\boxed{\text{pag. 159}}$ 2. 1) $f(x) = (1, 1 \leq 2x+1; 2x+1, 2x+1 < 1) = (1, 0 \leq x; 2x+1, x > 0)$; 2) $f(x) = (-2, -2 \geq$

$\geq 1-3x; 1-3x, 1-3x > -2) = (-2, x \geq 1; 1-3x, x < 1)$; 6) $f(x) = (1, 1-3x > 0; 0, 1-3x = 0; -1, 1-3x < 0) = \left(1, x < \frac{1}{3}; 0, x = \frac{1}{3}; -1, x > \frac{1}{3}\right)$. 3. 1) Se rezolvă inecuaţia în două cazuri: a) $x \leq 2$, când $f(x) = 3x - 2$; $3x - 2 \geq 1 \Rightarrow x \geq 1$. Cum $x \leq 2 \Rightarrow x \in S_1 = [1, 2]$; b) $x > 2$, $f(x) = 9 - 4x$; $9 - 4x \geq 1 \Rightarrow x \leq 2$. Dar $x > 2 \Rightarrow x \in S_2 = \emptyset$. În final $x \in S_1 \cup S_2 = [1, 2]$. 4. Se explicitează modulele şi se rezolvă ecuaţia pe intervale. În final se face reuniunea soluţiilor. a) $x \geq 0$, $|x| = x$, $1+x \geq 2x \Rightarrow x \leq 1 \Rightarrow x \in S_1 = [0, 1)$; b) $x < 0$, $|x| = -x$, $1-x \geq 2x \Rightarrow x \leq \frac{1}{3} \Rightarrow x \in S_2 = (-\infty, 0)$. În final $x \in S_1 \cup S_2 = (-\infty, 1]$; 2)$\mathbb{R}$; 3) $(-\infty, 0)$; 4) $(-2, \infty)$; 5) $\mathbb{R}$. 5. 1) $m = -\frac{1}{2}$; 2) $m < -\frac{1}{2}$; 3) $m > -\frac{1}{2}$. 6. 1) $x = -\frac{1}{5}$; 2) $x > -\frac{1}{5}$; 3) $x < -\frac{1}{5}$. 7. 1) $\left[-2, \frac{3}{2}\right)$; 2) $(-3, 6]$; 3) $(3, \infty)$; 4) $(-\infty, -1)$. 8. $f(g(x)) = (f(1-2x), x \leq 1; f(3x), x > 1)$, unde $f(1-2x) = (2(1-2x), 1-2x \geq 0, x \leq 1; 1-(1-2x), 1-2x < 0, x \leq 1) = \left(2-4x, x \leq \frac{1}{2}, x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right]\right)$. Analog, $f(3x) = (6x, 3x \geq 0, x > 1; 1-3x, 3x < 0, x > 1) = (6x, x > 1)$. 9. $f \nearrow$ pe $(-\infty, 0)$ şi $(0, \infty)$. Ca f să fie strict crescătoare pe $\mathbb{R}$ trebuie ca pentru $x_1 \leq 0$, $x_2 > 0$ $(x_1 < x_2)$ să avem $f(x_1) < f(x_2)$. Dar $f(x_1) \leq 1$ şi $f(x_2) > 3$. Deci $f \nearrow$ pe $\mathbb{R}$; 2) $f \searrow$; 3) $f(1) = 3 > f(x)$, $x > 1$ şi $f \nearrow$ pe $(-\infty, 1)$ şi $(1, \infty) \Rightarrow f$ nu este monotonă pe $\mathbb{R}$. 10. $f_{|(1,\infty)} \searrow \Rightarrow m < 0$, $f \searrow \Rightarrow m + 2m + 4 \geq -1 + 2 \Rightarrow m \geq -1 \Rightarrow m \in [-1, 0)$. 11. 1) $m + 1 > 0$, $-2m + 3 > 0$, $(m+1)3 + 3 < (-2m+3)3 + 1 - m \Rightarrow m \in \left(-1, -\frac{2}{5}\right)$. 12. $x - 3 = ax + 3 \Rightarrow x = \frac{6}{1-a} \in (-2, 2) \Rightarrow a$. 13. $-2 \leq x \leq 2 \Rightarrow -4 \leq 2x \leq 4 \Rightarrow -3 \leq 2x + 1 \leq 3 \Rightarrow f(x) = -3$, dacă $-3 \leq 2x + 1 < -2 \Leftrightarrow -2 \leq x < -\frac{3}{2}$; $f(x) = -2$ dacă $-2 \leq 2x + 1 < -1 \Leftrightarrow -\frac{3}{2} \leq x < -1, \ldots$ 6) $f(x) = [2x]$, $\forall x$. 14. 1) $2 \leq x + 1 < 3 \Leftrightarrow 1 \leq x < 2$; 3) $[3x] \in \mathbb{Z} \Rightarrow x + 2 \in \mathbb{Z} \Rightarrow x \in \mathbb{Z} \Rightarrow [3x] = 3x$ şi ecuaţia $3x = x + 2 \Rightarrow x = 1 \in \mathbb{Z}$. 6) $\left[\frac{x-3}{4}\right] = \left[\frac{x-4}{3}\right] = y \Rightarrow \left(y \leq \frac{x-3}{4} < y+1, y \leq \frac{x-4}{3} < y+1\right) \Rightarrow y \in (-3, 4)$, $y \in \mathbb{Z} \Rightarrow y \in \{-2, -1, \ldots, 3\}$; $y = -2 \Rightarrow \left(-2 \leq \frac{x-3}{4} < 2+1, -2 \leq \frac{x-4}{3} < -2+1\right) \Rightarrow x \in [-2, -1], \ldots, S = [-2, -1) \cup [1, 3) \cup [4, 10) \cup [11, 13) \cup [15, 16)$. 15. $x - 1 > 0$, $x + 1 > 0$, $5 - x > 0$, $x - 1 < x + 1 + 5 - x$, $x + 1 < x - 1 + 5 - x$, $5 - x < x - 1 + x + 1 \Rightarrow x \in \left(\frac{5}{2}, 3\right)$. **pag. 162** 1. 3) $f(x) > 0$, $x \in (-\infty, -2) \cup (3, \infty)$; $f(x) < 0$, $x \in (-2, 3)$; $f(x) = 0$, $x = -2$. 2. 1) $(-3, -2)$; 2) $\left[\frac{1}{2}, 1\right)$; 3) $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup \left(\frac{1}{2}, \infty\right)$; 4) $(-1, 0)$. 3. 1) $m > -1$, $f \nearrow$; $m < -1$, $f \searrow$; 2) $m \in (-\infty, 0) \cup (2, \infty)$, $f \nearrow$; $m \in (0, 2)$, $f \searrow$. 4. 1) $A = \{\pm 1, \pm 2, \pm 3, 0, 4\}$; 2) $B = \{1, 2\}$; 3) $C = \{\pm 3, \pm 2, \pm 1, 0\}$; 4) $D = \{-5, -4, -3\}$. **pag. 164** 1. 1) $f(x) = x$; 2) $f_1(x) = x$, $f_2(x) = -x + b$, $b \in \mathbb{R}$; 3) $f_1(x) = 2x + 2$, $f_2(x) = -2x - 6$, 2. $g(x) = -\frac{3x}{2} + 4$. 3. $g(x) = \frac{3x}{2} - \frac{1}{2}$. 4. $a = 3$, $b = 1$. 5. $x + 1 = y \Rightarrow f(y) = 2(y-1) - 3 + 5f(2) \Rightarrow f(y) = 2y - 5 + 5f(2)$; $y = 2 \Rightarrow f(2) = \frac{1}{4} \Rightarrow f(y) = 2y - \frac{15}{4}$. 6. $a = 1$, $b = 2$. 7. $g(x) = (2x + 4 + a, x \leq -1; bx + 2b - 3, x > -1)$; $a = 2$, $b = 1$. 8. 1) a) $g(x) = -\frac{x}{3}$; b) $g(x) = \frac{x}{\sqrt{2}}$; c) $g(x) = x - 3$; d) $g(x) = 2 - x$; e) $g(x) = \frac{x}{2} - \frac{3}{2}$; f) $g(x) = -\frac{x}{2} + \frac{1}{2}$; 2) a') $f^{-1}(0) = 0$; $f^{-1}(3) = -1$; b') $f^{-1}(0) = 0$; $f^{-1}(-\sqrt{2}) = -1$; 3) $f^{-1}(5) = 3$; $(f(3))^{-1} = \frac{1}{5}$. 9. $x - 1 \to x \Rightarrow f(x) \leq x - 1$ şi din $x \leq f(x) + 1 \Rightarrow x - 1 \leq f(x)$. Deci $f(x) = x - 1$. **pag. 169** 1. 1) a) $(-1, 1)$; b) $\left(x, \frac{x-4}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; c) $(2, -3)$; 2) a) $\frac{1}{x} = u$, $\frac{1}{y} = v$; $\left(\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)$; b) $\frac{1}{x-1} = u$, $\frac{1}{y-1} = v$; $(3, 2)$; c) incompatibil; $|x| = 1$, $|y| = -2!$; d) $|x| = u$, $|y| = v$; $(\pm 2, \pm 3)$; e) $[x] = u$, $[y] = v$; $(x, y) \in [-1, 0) \times [2, 3)$; f) incompatibil; $[x] = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $[y] = 2$; g) $\{x\} = u$, $\{y\} = v$, $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)$; h) incompatibil; $\{x\} = -\frac{1}{2} \notin [0, 1)$, $\{y\} = \frac{1}{4}$. 2. $m \neq -\frac{1}{2}$, $x = \frac{3}{2m+1}$, $y = \frac{m-1}{2m+1}$; $x > 0 \Rightarrow m > -\frac{1}{2}$; $y > 0 \Rightarrow m \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right) \cup (1, \infty)$; $m > 1$. 3. 1) $m \neq \pm 2$,

$x = \dfrac{2}{m-2}$, $y = \dfrac{1}{2-m}$; 2) $m = -2$; $\left(x, \dfrac{x+1}{2}\right)$, $x \in \mathbb{R}$; 3) $m = 2$, $x + 2y = 1$, $x + 2y = -1$, imposibil; 4) $2 - m \in \{\pm 1\} \Rightarrow m \in \{1,3\}$; $m = 1 \Rightarrow (1,-2)$; $m = 3 \Rightarrow (-1,2)$; 5) $\dfrac{-2}{2-m} \le 1 \Rightarrow m \in (-\infty,2) \cup [4,\infty)$; $\dfrac{1}{2-m} > 2 \Rightarrow m \in \left(\dfrac{3}{2},2\right)$. **4.** 1) Punem $-x$ în locul lui x şi avem $f(x) + 2f(-x) = -x + 3$. Notăm $f(x) = u$, $f(-x) = v$ şi avem sistemul $v + 2u = x + 3$ (relaţia dată), $u + 2v = -x + 3 \Rightarrow u = x + 1$, $v = -x + 1 \Rightarrow f(x) = x + 1$, $\forall x \in 3$; 2) $f(x) = -\dfrac{x}{3} - 4$, $x \in \mathbb{R}$. $\boxed{\text{pag. 173}}$ **2.** 1) strict descrescător; 2) strict crescător; 3) $x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}}$; $x_{n+1} - x_n < 0$, strict descrescător; 4) $\dfrac{x_{n+1}}{x_n} < 1$; strict descrescător; 5) strict crescător. **3.** 1) strict crescător; 2) strict crescător; 3) strict descrescător.

4. 1) Nu; $x_{2k} > 1$, $x_{2k+1} < 1$; 2) Nu. **5.** 1) $0 < x_n \le 1$; 2) $0 \le x_n \le 2$; 3) $1 \le x_n = 1 + \dfrac{1}{n} \le 2$; 4) $0 < x_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1} + \sqrt{n}} < \dfrac{1}{2\sqrt{n}} \le \dfrac{1}{2}$; 5) $x_n \in [0,2]$; 6) $x_n \in [0,2]$; 7) $x_n = \dfrac{1}{2n+1} \in (0,1)$. **6.** $x_n = n^2 + n + 1$. **7.** 1) $u_n = (\sqrt{2})^n$; 2) u_{15}. **8.** 1) $r = \dfrac{3}{5}$, $a_1 = 1$; 2) 1) a_{1000}; 2) Nu; 3) a_{500}; **9.** Diferenţa $a_{n+1} - a_n$ nu este constantă; **11.** 1) -41; 2) 2; 3) 3; 4) $a_1 = 14$, $r = -3$; 5) $a_1 = -7$, $r = \dfrac{3}{4}$; $a_1 = 5$, $r = \dfrac{3}{20}$; 6) $a_1 = -5$, $r = 2$; 7) $a_1 = 4$, $r = 1$; $a_1 = 6$, $r = -1$; 8) -3; -5; 9) 6; 10) -13; 1. **13.** $\dfrac{1}{a_1 a_2 a_3} = \dfrac{1}{2r}\left(\dfrac{1}{a_1 a_2} - \dfrac{1}{a_2 a_3}\right)$ etc. **17.** 2) a) Nu; b) b_6; c) b_{10}; **18.** 1) $2(-3)^5$; 2) $\sqrt{2} \cdot 2^9$; 3) 2; 4) 183; 5) $(16; \frac{1}{2})$; $(2; -3)$; 6) $(2;3)$; 7) $(2;3)$; $\left(-162; \dfrac{1}{3}\right)$; 8) 3; -2.

$\boxed{\text{Funcţii}}$ $\boxed{\text{pag. 176}}$ **4.** 1) $\mathbb{R}$; 2) $\mathbb{R} - \{-3\}$; 3) $\mathbb{R} - \{\pm 2\}$; 4) $[-1,\infty)$; 5) $(3,\infty)$; **5.** 1) $f(-2) = 3$, $f(-1) = 2$, $f(0) = 3$, $f(1) = 5$, $f(2) = 5$; **6.** 1); 3); 5). **10.** 1) impară; 3) impară; 5) pară; 6) pară.

$\boxed{\text{Funcţia de gradul I.}}$ $\boxed{\text{pag. 179}}$ **4.** 1) $f(x) = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{5}{2}$; 2) $f(x) = -2x + 5$; 3) $f(x) = -2x + 11$; 4) $f(x) = 5$. **7.** 1) $y = \dfrac{4}{3}x + \dfrac{1}{3}$; 2) $y = -3x$; 3) $y = x + 2$; **19.** 1) $\left[-\dfrac{3}{2}, -1\right) \cup (0,1)$; 2) $[-2,-1] \cup (2,3)$; 3) $\left[-\dfrac{1}{2}, -\dfrac{1}{3}\right] \cup \left(1, \dfrac{3}{2}\right] \cup [4,\infty)$.% **21.** 1) $[4,5)$; 2) $\left[-1, -\dfrac{1}{2}\right)$; 3) $\emptyset$; 4) -2; 5) 0.

$\boxed{\text{Teste de evaluare}}$ $\boxed{\text{pag. 182}}$ $\boxed{\text{Testul 1}}$ **1.** 1. $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ sau $a = 18$, $b = 6$, $c = 2$; **2.** 93; **3.** $a_{3(n+1)} - a_{3n} = a_1 + (3n+2)r - [a_1 + (3n-1)r] = 3r$, unde r este raţia progresiei date. **4.** $a_1 = S_1 = 3$, $r = 2$; **5.** b); **6.** b). **7.** $a \in \{4,7\}$; **8.** $f(-2) = 1$, $f(3) = 6$, $f(x) = x + 3$; **9.** $g(x) = 3\dfrac{x+1}{2}$; **10.** $f([1,\infty)) = (-\infty, a]$; $a = -2$; **11.** $m = 4$; **12.** $f((-\infty,2]) = \{f(x) | x \le 2\} = [-4,\infty)$, $f((2,\infty)) = (0,\infty)$, $f(\mathbb{R}) = f((-\infty,2] \cup (2,\infty)) = f((-\infty,2]) \cup f((2,\infty) = (-4,\infty)$. **13.** Nu, deoarece $f(1)$, de exemplu, nu este definit. **14.** a) $f(0) = 2$, $f(1) = 3$; $f(2) = 4$; $f(k) = 2^k$, $\forall k \ge 3$ (inducţie); b) $k = 3$; **15.** a) $x = 0$; b) $g(x) = 2x - 5$; **16.** Prin reducere la absurd. Din $x_1 \ne x_2$ şi $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow \sqrt{2} \in \mathbb{Q}$!. **17.** Prin reducere la absurd; dacă ar fi cel mult doi elevi care îşi serbează aniversarea într-o zi, atunci ar fi cel mult $365 \times 2 = 730$ elevi. $\boxed{\text{Testul 2}}$ **1.** $r_1 = -1$, $a_1 = 3$; $r_2 = 1$, $a_1 = 1$; 3, 2, 1 sau 1, 2, 3; **4.** 3, 7, 11; **6.** d); **7.** $S_{20} = 100$. **8** $f(x) = 0 \Rightarrow a = 1$; **9.** Segmentul (AB) este inclus în dreapta AB de ecuaţie $y = ax + b$; $f : (-2,1) \to \mathbb{R}$, $f(x) = -x - 2$; **10.** $f(x) = -x + 3$; **11.** $(f \circ f)(x) = x + 6$, dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $(f \circ f)(x) = x$, dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; $f^{-1}(x) = x - 3$, dacă $x \in \mathbb{Q}$ şi $f^{-1}(x) = 1 - x$, dacă $x \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$; **12.** $m \ge -2$; $f(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$; $f(\mathbb{R}) = (-\infty, 1 - m] \cup (3,\infty)$; $m = -2$; **13.** $f^{-1}((1,2)) = \{x \in \mathbb{R} | 1 < f(x) < 2\} = \left(1, \dfrac{3}{2}\right)$. **14.** Din $f(1) = a \in \{0,1,2,3\}$ şi $f(3) = 3a \le 3$, deducem $a \in \{0,1\}$. **15.** monoton, descrescătoare. **16.** a) $f(1) = 3$, $f(2) = 5$; b) Se adună $f(0) = 1$, $f(1) = f(0) + 2$, $\ldots$, $f(n) = f(n-1) + 2$; $f(n) = 2n + 1$; **17.** a) $f(x) = 2x + 4$, $f(x) = -2x - 12$; b) Se pune $y = 2x + 3$ şi din prima inegalitate rezultă $f(y) \le y - 3$, $y \in \mathbb{R}$. Notăm $y = 2x$ şi din a doua inegalitate, avem $f(y) \ge y - 3$. Deci, $f(y) = y - 3$. **18.** Cu trei segmente de lungime a, b, c se poate forma un triunghi, dacă $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$. Prin reducere la absurd. Fie $10 \le x_1 \le x_2 \le \ldots \le x_7 \le 100$. Cu x_1, x_2, x_3 nu se poate forma triunghi. Deci, $x_3 \ge x_1 + x_2 \ge 10 + 10 = 20$. Analog, $x_4 \ge x_2 + x_3 \ge 10 + 20 = 30, \ldots, x_7 \ge x_5 + x_6 \ge 50 + 80 = 150$, fals.

3. Funcţia de gradul al doilea

$\boxed{\text{pag. 191}}$ **1.** 1) Nu există. 2) $f(x) = 2x^2 - 3x - 3$; 3) $f(x) = \frac{13}{6}x^2 - \frac{5}{2}x - \frac{8}{3}$; 4) $f(x) = -x^2 + 5x$; **2.** 3) $(-\infty, 0]$, $f \searrow$; $[0, \infty)$, $f \nearrow$; $x_{\min} = 0$, $f_{\min} = 1$; $\operatorname{Im} f = [1, \infty)$; 6) $(-\infty, 3/2]$, $f \nearrow$; $[3/2, \infty)$, $f \searrow$; $x_{\max} = 3/2$, $f_{\max} = 9/4$; $\operatorname{Im} f = (-\infty, 9/4]$. **3.** 1) $x_v = -\frac{b}{2a} = 3 \Rightarrow m = 6$; 2) $x_v \geq 3 \Rightarrow m \geq 6$; 3) $x_v \leq 3 \Rightarrow m \leq 6$; 4) $2 \leq x_v \Rightarrow m \geq 4$; 5) $x_v \leq 1 \Rightarrow m \leq 2$; 6) $1 < x_v < 2 \Rightarrow 2 < m < 4$. **4.** 1) $(-\infty, 0]$, $f \searrow$; $[-1, 0] \subset (-\infty, 0) \Rightarrow f([-1, 0]) = [f(0), f(-1)] = [-1, 0]$; $A = [-1, 2] = [-1, 0] \cup [0, 2]$ şi $f(A) = f([-1, 0]) \cup f([0, 2])$, unde $[0, 2] \subset [0, \infty)$, unde $f \nearrow \Rightarrow f([0, 2]) = [f(0), f(2)] = [-1, 3] \Rightarrow f(A) = [-1, 0] \cup [-1, 3] = [-1, 3]$; $f^{-1}(\{0\}) = x$ cu $0 = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 0 \Rightarrow x \in \{\pm 1\} \Rightarrow f^{-1}(\{0\}) = \{\pm 1\}$, $f^{-1}(\{0, 1\}) = f^{-1}(\{0\}) \cup f^{-1}(\{1\})$, unde $f^{-1}(\{1\}) = x$ cu $1 = f(x) \Rightarrow x^2 - 1 = 1 \Rightarrow x \in \{\pm\sqrt{2}\} \Rightarrow f^{-1}(\{0, 1\}) = \{\pm 1, \pm\sqrt{2}\}$. **5.** $m = \pm 2$. **6.** $\left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)$, $f(x) = x^2 + x - m + 1 \searrow \Rightarrow$ este la fel pe $(-\infty, -1]$; se impune $m < 0$, $x = \frac{1}{2m} = -1$, $f(-1) = -m + 1 \geq m(-1)^2 - (-1) + 1$, $m = -\frac{1}{2}$. **7.** a) 1) $m < -\frac{3}{4}$; 2)$m > -\frac{3}{4}$. **8.** $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$. **10.** 1) $f(x) = x^2 - 1 \geq -1 \Rightarrow f_{\min} = -1 \Rightarrow \operatorname{Im} f = [-1, \infty)$; 4) $f(x) = -5\left(x - \frac{1}{5}\right)^2 + \frac{16}{5} \leq \frac{16}{5} \Rightarrow f_{\max} = \frac{16}{5}$. **11.** b) 1) $y = x^2 - 3x$; 2) $y = x^2 - x - 1$; 3) $x^2 - 3x = y$; 4) $2x^2 - x = y$. **13.** $b^2 = -ac$, $\Delta = 5b^2 > 0$ şi $P = \frac{c}{a}$ (produsul rădăcinilor); $ac = -b^2 < 0$. **14.** Prin reducere la absurd. Presupuem că $\Delta_1 = a^2 - 4b < 0$ şi $\Delta_2 = b^2 - 4a < 0 \Rightarrow \Delta_1 + \Delta_2 = a(a-4) + b(b-4) > 0$, fals. **15.** $m = 2, n = -1$. **16.** $f_{\max} = f\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}$. **17.** $a_n =$ numărul maxim de regiuni pe care le determină n tăieturi; $a_n = \frac{n^2 + n + 2}{2}$. **18.** $f(k) = f(2008 - k)$, $k = \overline{0, 2008}$. **19*.** $f(x) = \sum x^2 - xyz - 2 \leq \max(f(0), f(1))$; „=" dacă $x = y = 1$, $z = 0$; $x = z = 1$, $y = 0$, $y = z = 1$, $x = 0$. **20.** $f(x) = (x^2 + 3x)(x^2 + 3x + 2)$, $z = x^2 + 3x$, $g(z) = z(z + 2) = (z + 1)^2 - 1 \geq -1$; $g(z) = -1 \Leftrightarrow z = -1 \Leftrightarrow x^2 + 3x = -1$.

$\boxed{\text{pag. 201}}$ **1.** a) 1) – 2) $x = 0$; 3) $x = \frac{2}{3}$; 4) $x = \frac{5}{2}$; b) 1) $x = 1$; 2) $x = \frac{5}{2}$. **2.** Se rezolvă ecuaţia $f(x) = 0$ şi se calculează $f(0)$; 1) $G_f \cap Ox = \{(-3, 0), (3, 0)\}$, $G_f \cap Oy = \{(0, -9)\}$; 2) $f(x) = 0 \Rightarrow x \in \emptyset \Rightarrow G_f \cap Ox = \emptyset$, $G_f \cap Oy = \{(0, 1)\}$. **3.** Pentru $f(A)$ se scrie A ca reuniune dacă $x_V \in A$ şi se aplică $f(X \cup Y) = f(X) \cup f(Y)$ plus monotonia lui f pentru calculul lui $f(X)$, $f(Y)$; 1) $x_V = 0 \in A \Rightarrow A = (-3, 0] \cup (0, 5)$; $f((-3, 0]) = [0, 9)$, $f((0, 5]) = (0, 25] \Rightarrow f(A) = [0, 9) \cup (0, 25] = [0, 25]$. Pentru determinarea lui $f^{-1}(B)$ ducem dreptele paralele cu Ox, $y = 1$, $y = 4$. Acestea intersectează parabola în punctele de abscise obţinute rezolvând ecuaţiile $x^2 = 1$, $x^2 = 4$, adică $x = -2$, $x = -1$, $x = 1$, $x = 2$. Se proiectează pe Ox arcele de parabolă cuprinse între cele două drepte şi obţinem $x \in [-2, -1]$, $x \in [1, 2]$. Deci $f^{-1}([1, 4]) = [-2, -1] \cup [1, 2]$. **5.** 1) $x_V = \frac{1}{m} - 1$, $y_V = 1 - \frac{1}{m} \Rightarrow x_V + y_V = 0$; 2) $m(x^2 + 2x + 1) - 2x - 1 = 0, \forall m \Rightarrow x^2 + 2x + 1 = 0$, $2x + 1 = 0 \Rightarrow A(-1, 1)$; 3) a) $y_V < 0 \Rightarrow \frac{m - 1}{m} < 0 \Rightarrow m \in (0, 1)$; b) $\frac{m - 1}{m} = 3 \Rightarrow m = -\frac{1}{2}$; c) $\frac{m - 1}{m} > -1 \Rightarrow m > 0$; d) $2(1/m - 1) + 3(1 - 1/m) - 5 = 0 \Rightarrow m = -\frac{1}{4}$; 4) $x_V = \frac{1}{m} - 1 \Rightarrow m = \frac{1}{x_V + 1} < 0 \Rightarrow x_V < -1$. Deci $x + y = 0$ cu $x < -1$. **6.** 1) $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, $a + b + c = 0$, $c = 1$; 2) $f(3) = 1$, $f(4) = 4$, $-\frac{b}{2a} = 2$; $f(x) = x^2 - 4x + 4$; 3) $f(0) = -1$, $f(3) = -1$ şi ecuaţia $ax^2 + bx + c - 2 = 0$ are rădăcină dublă $\Leftrightarrow b^2 - 4a(c - 2) = 0$; 4) $f(4) = 5$, $-\frac{b}{2a} = 2$, $-\frac{\Delta}{4a} = 3$; 5) $x = -2 \Rightarrow y = 2x - 12 = -16 \Rightarrow (-2, -16) \in G_f \Leftrightarrow f(-2) = -16$ şi $x = 4 \Rightarrow y = -4 \Rightarrow (4, -4) \in G_f \Leftrightarrow f(4) = -4$. $\boxed{\text{pag. 205}}$ **3.** Fie $A = \{x_1, x_2\}$, $B = \{x_3, x_4\}$. Avem $x_1 + x_2 = 6 = 1 + 5 = 2 + 4$. Dacă $A = \{1, 5\}$, atunci $B = \{2, 4\} \Rightarrow a = 5$, $b = -(2 + 4) = -6$, $c = 2 \cdot 4 = 8$; dacă $A = \{2, 4\}$, atunci $B = \{1, 5\} \Rightarrow a = 8$, $b = -6$, $c = 5$. **4.** 1) a) $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_2 = \frac{3}{4}$, $m = -\frac{13}{16}$; b) $x_1 = 2$, $x_2 = -1$, $m = -3$; c) $m = 3$; d) $m = -2$; e) $m < -1$; f) $m = 2$; 2) a) $\Delta = 0 \Rightarrow m = -1$; b) $m \in \{-2, 1\}$. **5.** 1) $S = 2(P + 1)$; 2) $S = 3(P + 1)$; 3) $\frac{1}{S + 1} = m$, $P - 3 = \frac{4}{m + 1} \Rightarrow \frac{4}{P - 3} = \frac{1}{S + 1} + 1$. **6.** 7) Se aduce la acelaşi numitor. 8) $7x_1^2 - 3x_1 + 2 = (x_1 + 3) - 3x_1 + 2 = 5 - x_1$; $\frac{5 - x_1}{5 - x_2} + \frac{5 - x_2}{5 - x_1}$ şi se continuă ca la 7). **7.** 1) Se ridică la pătrat, plus relaţiile lui Viète; 2) din 1) $\Rightarrow (x_1-1)^2 \leq 4, (x_2-1)^2 \leq 4 \Rightarrow (-2 \leq x_1 - 1 \leq 2$ şi $-2 \leq x_2 - 1 \leq 2)$. 8. $\min(x_1^2+x_2^2) = \min(m^2-6m+1) = -8$ pentru $m = 3$. 9. 1) $\Delta = 9m^2-4m+2 = 9\left(m+\frac{2}{9}\right)^2 + \frac{14}{9} > 0$; 2) $x_1+2 < 0$, $x_2+2 > 0 \Rightarrow (x_1+2)(x_2+2) < 0 \Rightarrow x_1x_2 + 2(x_1+x_2) + 4 < 0 \Rightarrow m \in \left(1, \frac{15}{4}\right)$. 11. 1) Din $y = 2x \Rightarrow x = \frac{y}{2}$ care se înlocuieşte în ecuaţia în x. $\boxed{\text{pag. 209}}$ 5. 1) $f(x) = (1, x^2-4>0; 0, x^2-4=0; -1, x^2-4<0) = (1, x \in (-\infty,-2) \cup (2,\infty); 0, x = \pm 2; -1, x \in (-2,2))$. 6. a) $f(x) \geq 0, \forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta \leq 0 \Leftrightarrow m^2 - 16 \leq 0 \Rightarrow m \in [-4,4]$. 7. $t = \frac{a}{b} + \frac{a}{b} \Rightarrow t^2 - 3t + 3 > 0, \forall t$. 8. $E(x,y) = (x-y+3)^2 + 5(y-1)^2 + 4 \geq 4$; „=" dacă $x - y + 3 = 0$, $y = 1 \Rightarrow x = -2, y = 1$; altfel, luaţi ca funcţie de gradul doi în x. 9. 1) $(x-1)^2+(y+1)^2+m-2 > 0 \Rightarrow m > 2$; altfel $x^2-2x+y^2+4y+m+1 > 0, (\forall x), (\forall y) \Rightarrow \Delta_x < 0, \forall y \Rightarrow y^2+4y+m+3 > 0, \forall y \Rightarrow \Delta_y < 0 \Rightarrow 4-m-2 < 0 \Rightarrow m > 2$. 10. 1) $\Rightarrow$ Ecuaţia are rădăcini reale distincte $\Rightarrow \Delta_f > 0 \Rightarrow 2)$. 11. 1) $f_{\min} = \frac{\left(\sum a_i\right)^2 - n\left(\sum a_i^2\right)}{n}$; 2) $f(x) \geq 0, \forall x \Rightarrow \Delta \leq 0 \Rightarrow$ ineg. 12. 1) Sumă de pătrate; 2) $f(x) = \left(\sum a_i^2\right)x^2 - 2\left(\sum a_ib_i\right)x + \sum b_i^2$; $f_{\min} = -\frac{\left(\sum a_ib_i\right)^2 - \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)}{\sum a_i^2}$; 3) $f(x) \geq 0 \Rightarrow f_{min} \leq 0 \Rightarrow$ inegalitatea C-B-S; avem egalitate dacă $a_1x-b_1 = a_2x-b_2 = \ldots = 0$. **Aplicaţii.** 1) Se ia funcţia $f(x) = a^2-(b+c)a+b^2+c^2-bc$ cu $\Delta_a = -3(b-c)^2 \leq 0$; 2) Coeficientul lui x^2 este $a_1^2 - a_2^2 - \ldots - a_n^2 > 0$ şi din $f\left(\frac{b_1}{a}\right) < 0 \Rightarrow$ ecuaţia $f(x) = 0$ are rădăcini reale $\Rightarrow \Delta_f \geq 0 \Rightarrow$ inegalitatea lui Aczél. $\boxed{\text{pag 212}}$ 5. $\Delta_1 \geq 0 \Rightarrow m \in (-\infty,-2] \cup [2,\infty)$; $\Delta_2 \geq 0 \Rightarrow m \in [-1,1]$. 6. a) f este definită pe $\mathbb{R}$, dacă numitorul nu se anulează pe $\mathbb{R} \Rightarrow \Delta_1 < 0 \Rightarrow m \in (-2,2) \Rightarrow x^2+mx+1 > 0$, $x \in \mathbb{R}$, $f(x) > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow x^2 - mx + m + 2 > 0, \forall x \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_2 < 0 \Rightarrow m \in (2-2\sqrt{3}, -2+2\sqrt{3}$, $m \in (-2, -2+2\sqrt{3})$. 8. $a^2 + (1-x)a + 1 - x = 0$, are rădăcini reale dacă $\Delta_a \geq 0 \Rightarrow x \in (-\infty,-3] \cup [1,\infty)$. 9. Valoarea fiecărei funcţii este ≥ 5. 10. c) 1) $y = x^2 - 2$; $y + \frac{2}{y} > 3 \Rightarrow y \in (0,1) \cup (2,\infty) \Rightarrow 0 < x^2 - 2 < 1$ sau $x^2 - 2 > 2$ şi se face reuniunea soluţiilor; 2) $y = x - x^2$; $\frac{y^2-4y}{y+2} < 0 \Rightarrow y \in (-\infty,-2) \cup (0,4)$. 11. 1) $m - 1 > 0$, $-1 \leq x_V = \frac{m}{2(m-1)}$; 2) $m - 1 < 0$; $-1 \leq x_V$; 3) $m - 1 > 0$, $x_V \leq 2$; 4) $m - 1 < 0$, $x_V \leq 2$; 5) $(m-1>0, x_V \leq 1)$ sau $(m-1<0, 2 \leq x_V)$, apoi se face reuniunea soluţiilor. 12. a) $m - 1 > 0$, $\Delta \leq 0$; 13. $1 < x_V < 2$. 14. 1) $m > 0$, $-\frac{\Delta}{4a} < 0$; 2) $m > 0$, $-\frac{\Delta}{4a} > 0$; 3) $m < 0$, $-\frac{\Delta}{4a} < 0$; 4) $m < 0$, $-\frac{\Delta}{4a} > 0$. 15. 1) $-2 \leq x^2 - 2x < 3$; 2) $2 \leq x^2 - 4x + 5 < 3$. $\boxed{\text{pag. 215}}$ 3. $\text{Im}f = \left[\frac{1-\sqrt{3}}{2}, \frac{1+\sqrt{3}}{2}\right]$; $n = 2$. 4. $m = -1$. 5. $[-4,0]$ 6. $\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$. 7. a) 1) $0 \leq \frac{x}{x^2-x+1} < 1 \Leftrightarrow (0 \leq x, (x-1)^2 > 0)$; b) $x^2 - 3x = y$. 8*. $\frac{x^2+ax+b}{x^2+1} = y \Rightarrow (1-y)x^2 + ax + b - y = 0 \Rightarrow \Delta_x \geq 0 \Rightarrow -4y^2 + 4(1+b)y + a^2 - 4b \geq 0 \Rightarrow y \in [y_1, y_2]$, unde $y_1 + y_2 = \frac{b+1}{2} = 0 \Rightarrow b = -1$ şi $y_1y_2 = \frac{a^2-4b}{-4} = -4 \Rightarrow a = \pm 2\sqrt{3}$. $\boxed{\text{pag. 221}}$ 1. 1) $S = 3$, $P = 0 \Rightarrow x_1 = 0, x_2 = 3$. 2. 1) $\Delta = -4m+5$, $S = 1$, $P = m - 1$; $m_1 = 1$; $m_2 = \frac{5}{4}$ şi se face tabelul de discuţie. 3. $\Delta = (m-2)^2 \geq 0 \Rightarrow$ ecuaţia are rădăcini reale, $\forall m \in \mathbb{R}$; $P = m - 1$; a) $\Delta = 0 \Rightarrow m = 2$; b) $S = 0, P < 0 \Rightarrow (m = 0, m - 1 < 0) \Rightarrow m = 0$; c) $(S > 0, P > 0) \Rightarrow (m > 0, m - 1 > 0) \Rightarrow m > 1$; d) $P < 0 \Rightarrow m < 1$; e) $m \in \emptyset$. 4. 1) $y = x - 3 \Rightarrow x = y + 3 \Rightarrow (y+3)^2 - 4(y+3) + m = 0 \Rightarrow y^2 + 2y + m - 3 = 0$; a) $y_1, y_2 \leq 0 \Rightarrow \Delta = 4 - m \geq 0$; $S = -2 < 0$, $P = m - 3 \geq 0 \Rightarrow m \in [3,4]$. 5. 1) Avem două cazuri: a) $\Delta < 0 \Rightarrow m \in M_1$; b) $\Delta \geq 0$, $x_1x_2 \leq 1 \Rightarrow m \in M_2$; $m \in M_1 \cup M_2$. 6. 1) card$(A) = 0$ dacă $(\Delta < 0$ sau $\Delta \geq 0$, $x_1, x_2 \leq 1) \Rightarrow m \in [-2,2)$; card$(A) = 1$ dacă $(\Delta = 0$ sau $x_1 = x_2 > 1$ sau $\Delta > 0, x_1 < 1 < x_2)$; card$(A) = 2$ dacă $(\Delta > 0, x_1, x_2 > 1$. 8. 1) a) $[3,4]$; 2) a) $\left(-2, -\frac{7}{4}\right)$. 10. $f(0)f(1) < 0$. 11. $\Delta > 0$, $0 < x_1, x_2 < 1$. 12. $m \in \{0,2\}$.

13. $m \in \{\pm 3\}$. 14. $a = 10$, $b = -15$. **pag. 231** 6. **I.** 1) $(0,-1),(3,2)$; 2) $(2,3)$; 3) $\emptyset$; 4) $(0,1),(4,5)$; 5) $(3,5)$; 6) $\emptyset$; 7. 1) $(1,3),(3,1)$; 2) $(5,-2),(-2,5)$; 3) $(5,4),(4,5)$; 8. 1) $\left(\alpha, -\dfrac{3\alpha}{2}\right)$, $\alpha \in \mathbb{R}$; 2) $(0,0)$; 3) $(0,0)$; 4) $\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, \sqrt{2}\right), \left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}, -\sqrt{2}\right)$;

Teste de evaluare. **pag. 232**

Testul 1. 1. a) $G_f \cap Ox = \{(1,0),(3,0)\}$, $G \cap Oy = \{(0,3)\}$, $V(2,-1)$(minim), $x = 2$, $(-\infty, 2]$, $[2, \infty)$. Observăm că $g(x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, ceea ce înseamnă că graficul lui g se obţine din graficul lui f prin simetrizarea în raport cu axa Ox; b) Al doilea punct de intersecţie va fi simetricul lui A faţă de $x = 1$, axa de simetrie a celor două parabole. Deci, $B(-1,4)$; 2. a) $x_{\min} = 2$ şi $f_{\min} = f(2) = -1$. $m = -1$; b) $n = 2$; 3. a) Se ordonează după puterile descrescătoare ale lui x, $\Delta_x \leq 0 \Rightarrow -y^2 - 6y + 4 - m \leq 0$, $\forall y \in \mathbb{R} \Rightarrow \Delta_y \leq 0 \Rightarrow m \geq 13$; b) Domeniul lui f_m este $\mathbb{R}$, deci $x^2 + mx + 1 \neq 0$, $\forall x \in \mathbb{R} \Leftrightarrow \Delta < 0$. De aici, $x^2 + mx + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Se impune $(m-1)x^2 + 2mx + m + 1 > 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Trebuie ca $\Delta_1 < 0$ şi $m - 2 > 0$; $m \in \emptyset$; c) $y \in \left[-3, \dfrac{7}{3}\right]$, $f_{\min} = -3$, $f_{\max} = \dfrac{7}{3}$; 4. a) $\Delta > 0$, $mf(1) \geq 0$, $mf(0) \geq 0$, $-\dfrac{b}{2a} = \dfrac{m^2 - m + 1}{2m} \in (0,1)$, $m \neq 0$; $m \in [1,2]$; b) $x_1 f(x_2 - m) + x_2 f(x_1 - m) = x_1 x_2 (x_1 + x_2) - 2m x_1 x_2 + (m-4)(x_1 + x_2) = -4m(m-4) \geq 0$; $[0,4]$; a). 5. a) Sistem simetric; (1,2), (2,1), $(-1,-2)$, $(-2,-1)$; b) Dacă sistemul are soluţia (x,y,z), atunci are şi soluţia (z,y,x). Deci $x = y$. Avem sistemul $x - y = a$, $3x^2 + 6xy = 3a - 4$; $a \in \{1, -4\}$. **Testul 2.** 1. a) $G_f \cap Ox = \{1,0),(3,0)\}$, $G_f \cap Oy = \{(0,3)\}$, $x = 2$, $(-\infty, 2] \cup [2, \infty)$. Cum $g(-x) = f(x)$, deducem că graficele celor două funcţii sunt simetrice în raport cu Oy; b) Punctele A, A' fiind simetrice în raport cu $x = 2$, atunci $m = -2$; 2. a) $m = 4$; b) $n = 2$; c) Regiunea delimitată se poate acoperi cu pătratul de latură 4, de arie 16. Deci, $S < 16$. Pe de altă parte, se duc paralele la Oy prin (1,0), (2,0), (3,0), (4,0) care taie arcul de parabolă. Se unesc succesiv aceste puncte. Se formează două triunghiuri şi două trapeze congruente. Deci $S > 2\left(\dfrac{3}{2} + \dfrac{3+4}{2}\right) = 10$; 3. a) $(1,-2)$, $(2,-1)$; b) $f(1) = -2$, $f(2) = -1 \Rightarrow a = 2$, $b = -5$; c) $y = |x| \geq 0$, $f(y) \geq 0$, $\forall y \geq 0$; b); 4. a), d); b), c); c), a); 5. a) $a \in \{1,3\}$; $a = 1$ sistemul are soluţia (1,1), care sunt coordonatele punctului de tangenţă ale dreptei la parabolă; b) $\left(-\dfrac{2}{3}, \infty\right)$.