

GEOMETRIE

1. Vectori în plan

pag. 243 1. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CN}$ și se adună. 2. $ABCDEF$ hexagon, (M, N) , (P, Q) , (R, S) mijloacele perechilor $([AB], [AD])$, $([BC], [FE])$ și respectiv $([CD], [FA])$; $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DN}$, $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE} + \overrightarrow{EN} \Rightarrow 2\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{FE}$ și analoge $2\overrightarrow{QP}$, $2\overrightarrow{RS} \Rightarrow \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{QP} + \overrightarrow{RS} = \vec{0}$. 3. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DF}$, care se adună; $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DF}$, $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{EC} + \overrightarrow{CB} + \overrightarrow{BF}$, care se adună. 4. $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{OO_1} + \overrightarrow{O_1M}$ și analoge. **pag. 249** 1. $(-1, 1)$; $(-5, 0)$; $(-20, 1)$. 2. $\alpha(\vec{a} + \vec{b}) + \beta(\vec{a} - \vec{b}) = \vec{0} \Rightarrow (\alpha + \beta)\vec{a} + (\alpha - \beta)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow (\alpha + \beta = 0, \alpha - \beta = 0) \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. 4. $\vec{v}_1 = -\vec{b}$, $\vec{v}_2 = -7\vec{b} \Rightarrow \vec{v}_2 = 7\vec{v}_1$. 5. $\alpha\vec{v}_1 + \beta\vec{v}_2 = \vec{0} \Rightarrow (2\alpha + 3\beta)\vec{a} + (-3\alpha - 4\beta)\vec{b} = \vec{0} \Rightarrow 2\alpha + 3\beta = 0 = -3\alpha - 4\beta \Rightarrow \alpha = \beta = 0$. 6. 1) a) $\overrightarrow{AN} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN}$, $\overrightarrow{AN}(2, 1)$; $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(-2\overrightarrow{AP} + 2\overrightarrow{CN}) = -\overrightarrow{AP} + \overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{NC} = -2\overrightarrow{CN}$; $\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CP} = -2\overrightarrow{CN} - \overrightarrow{AP} = -\overrightarrow{AP} - 2\overrightarrow{CN}$; b) $\overrightarrow{AB}(0, 2)$, $\overrightarrow{BC}(2, -2) \Rightarrow \overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{BC} = (0, 2) + 2(2, -2) = (4, -2)$; $\overrightarrow{AC}(2, 0)$, $\overrightarrow{CB}(-2, 2)$; $(8, -2)$; 2) a) $\overrightarrow{CM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = \frac{1}{2}(4\overrightarrow{CP} - 3\overrightarrow{BN}) = 2\overrightarrow{CP} - \frac{3}{2}\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB} = -4\overrightarrow{CP} - 3\overrightarrow{BN}$; $\overrightarrow{AN} = \frac{\overrightarrow{AC} + 2\overrightarrow{AB}}{1+2}$ (rezultă din $\overrightarrow{CN} = 2\overrightarrow{NB} \Leftrightarrow \overrightarrow{AN} - \overrightarrow{AC} = 2(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AN}) = \frac{1}{3}[-4\overrightarrow{CP} + 2(\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CB})]$); b) $\overrightarrow{MC} = -\overrightarrow{CM} = -\frac{1}{2}(\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{CB}) = -\frac{1}{2}(-4\overrightarrow{CP} + 3\overrightarrow{BN}) = \left(2, -\frac{3}{2}\right)$. 7. 1) 1°) $\overrightarrow{AO} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD})$;

$$\overrightarrow{OB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{DA} + \overrightarrow{AB}) = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}; \overrightarrow{OM} = \overrightarrow{NA} = -\overrightarrow{AN} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AD}; \overrightarrow{ON} = \overrightarrow{MA} = -\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}.$$

pag. 251 1. $\overrightarrow{OA} = \vec{i} + 2\vec{j}$, $\overrightarrow{OD} = -3\vec{i}$, $\overrightarrow{OE} = 5\vec{j}$, $\overrightarrow{AB} = -3\vec{i} + \vec{j}$, $\overrightarrow{BD} = -\vec{i} - 3\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} = -2\vec{i} - 4\vec{j}$, $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = -3\vec{i} - 7\vec{j}$, $|\overrightarrow{OA}| = \sqrt{5}$, $|\overrightarrow{OD}| = 3$, $|\overrightarrow{OE}| = 5$. 2. 1) $\overrightarrow{A_1A} = \overrightarrow{AA_2} \Rightarrow (x - x_1)\vec{i} + (y - y_1)\vec{j} = (x_2 - x)\vec{i} + (y_2 - y)\vec{j} \Rightarrow (x - x_1 = x_2 - x \text{ și } y - y_1 = y_2 - y)$; 2) $M(3, 2)$ este mijlocul lui $[AB]$, $N(4, 5)$, $P(2, 4)$; 3) $AB = BC = 2\sqrt{5}$, $AC = 2\sqrt{10}$; 4) $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3) \Rightarrow 2 = \frac{x_1 + x_2}{2}$, $-1 = \frac{y_1 + y_2}{2}$, $-1 = \frac{x_2 + x_3}{2}$, $4 = \frac{y_2 + y_3}{2}$, $-2 = \frac{x_1 + x_3}{2}$, $2 = \frac{y_1 + y_3}{2} \Rightarrow A(1, -3)$, $B(3, 1)$, $C(-5, 7)$. 3. Mijlocul diagonalei $[AC]$ este $O_1(-1, 3) \Rightarrow O_1$ mijlocul lui $[BD]$, $D(x, y) \Rightarrow -1 = \frac{x+2}{2}$, $3 = \frac{y}{2} \Rightarrow D(-4, 6)$. 5. 1) $B(x, y)$, $\overrightarrow{AB} = (x-1)\vec{i} + (y+2)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow (x-1=3, y+2=5) \Rightarrow B(4, 3)$; 2) $A(x, y)$, $\overrightarrow{AB} = (-2-x)\vec{i} + (3-y)\vec{j} = 3\vec{i} + 5\vec{j} \Rightarrow (-2-x=3, 3-y=5) \Rightarrow A(-5, -2)$. 6. $\vec{i} = \frac{\vec{a}-\vec{b}}{2}$, $\vec{j} = \frac{\vec{a}+\vec{b}}{2}$. 7. 1) $(x-1, y) = 2(2, -1) \Rightarrow x=5, y=-2$. 8. 1) $(-1-x, y-1) = (2, 3-y) \Rightarrow x=-3, y=2$. 9. 2) $|\vec{a}| = \sqrt{m^2+9} = 10 \Rightarrow m = \pm\sqrt{91}$; $|\vec{b}| = \sqrt{4+n^2} = 3 \Rightarrow n = \pm\sqrt{5}$. 10. 1) $\overrightarrow{CD} = -3\overrightarrow{AB}$; altfel: $m_{AB} = m_{CD} = \frac{1}{2}$. 12. $m_{AB} = m_{CD} = 1$, $m_{BC} = m_{AD} = -1$. 13. $m_{AB} = m_{CD}$, $m_{AD} = m_{BC} \Rightarrow ABCD$ este paralelogram; $m_{AD} = m_{BC}$, $m_{BD} = m_{AC} \Rightarrow ADBC$ este paralelogram. 14. Paralelogram cu diagonale egale. 15. 1) $C(x, 0)$, $AC = BC \Rightarrow x = 7$; $C'(0, y)$, $AC = BC \Rightarrow y = 7$; 2) $C(x, y)$, $AB = BC = AC \Rightarrow$ două soluții. 17*. Prin reducere la absurd. Fie a lungimea laturii. Avem $(\sum x_i)\vec{i} + (\sum y_i)\vec{j} = \vec{0} \Rightarrow \sum x_i = \sum y_i = 0$, (1). În plus $|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}| = |\overrightarrow{CA}| = a \Rightarrow x_1^2 + y_1^2 = x_2^2 + y_2^2 = x_3^2 + y_3^2 = a^2$, (2). Se ridică (1) la pătrat și se adună cele două relații, via (2), rezultă $3a^2 = -2 \sum_{i \neq j} (x_i x_j + y_i y_j) \Rightarrow a^2$ par (presupunem că a este cea mai mică

latură posibilă) $\Rightarrow a^2:4$ sau $(a^2:2) \Rightarrow (x_i, y_i \text{ pare})$ sau $(x_i, y_i \text{ impare din } x_i^2 + y_i^2 = a^2) \Rightarrow (\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}, \frac{1}{2}\overrightarrow{BC}, \frac{1}{2}\overrightarrow{CA})$ determină triunghi echilateral cu latură $< a$, fals) sau $(\sum_{i \neq j} (x_i x_j + y_i y_j) : 2 \Rightarrow a^2:4, \text{ fals})$. Altfel, utilizând panta drepte și formula pentru tangenta unghiului a două drepte!

Adunarea vectorilor **pag. 258** 2. $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{BC})$, $\overrightarrow{MN} + \overrightarrow{NP} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$, $\overrightarrow{CN} + \overrightarrow{CP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC}$; se construiesc paralelogramele $BMNQ$, $NPCR$; $\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{QN} + \overrightarrow{NR} = \overrightarrow{BM} + \overrightarrow{PC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{MP}$; 3. $\overrightarrow{B'B} = \overrightarrow{DD'}$; $6\sqrt{2}$.

Înmulțirea unui vector cu un scalar **pag. 258** 1. 1) Paralelogramul $ABA'C$ dă $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC}$, $\overrightarrow{AA'} = 2\overrightarrow{AM}$; 2) Se utilizează 1); 2. 2) Se aplică regula poligonului și fiecare membru este egal cu \overrightarrow{AB} ; 5. Regula poligonului; \overrightarrow{MB} ; 6. Se scrie vectorii \overrightarrow{MP} și \overrightarrow{MN} în funcție de \overrightarrow{AB} și \overrightarrow{AC} ; $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}(-\overrightarrow{AB} + 2\overrightarrow{AC})$; 7. Linii mijlocii; pentru soluția vectorială $XYZU$ este paralelogram $\Leftrightarrow \overrightarrow{MX} + \overrightarrow{MZ} = \overrightarrow{MY} + \overrightarrow{MU}$, $\forall M$; 10. Aplicați regula poligonului; 11. Arătați că $2\overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MA} - 3\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{BA}$!

Descompunerea unui vector după două direcții date **pag. 259** 1. $\overrightarrow{AA'} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AC})$, $\overrightarrow{BB'} = -\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$; $\overrightarrow{CC'} = -\overrightarrow{AC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$; 2. Formula pentru punctul care împarte un segment într-un raport dat, $3\overrightarrow{MN} = \frac{3}{4}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC} - \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{PQ} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AB} - \frac{1}{5}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{QM} = -\frac{4}{5}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MP} = \frac{5}{12}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{NQ} = -\overrightarrow{AB} + \frac{2}{15}\overrightarrow{BC}$; 4. $\overrightarrow{MD} = \overrightarrow{AD} - m\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{MN} = (n-m)\overrightarrow{AB} + n\overrightarrow{AD}$.

Coliniaritatea a doi vectori. Paralelismul a două drepte **pag. 259** 1. $\frac{AO}{AD} = k$, $\overrightarrow{EO} = (k + \frac{1}{2})\overrightarrow{AB} + \frac{4k}{3}\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{EC} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$; $k = \frac{1}{2}$; 2. 2) $\overrightarrow{NP} = 3\overrightarrow{MN}$; 3. $\overrightarrow{CE} = -\overrightarrow{AB} - \frac{1}{2}\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{AD} + \frac{3}{4}\overrightarrow{AB}$; 4. $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{4}\overrightarrow{AE}$; 5. Fie $QS \parallel AB$, $S \in [BC]$, $QT \parallel AC$, $T \in [BC]$, $2\overrightarrow{QR} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{NC}$; fie

$[AD] \equiv [MB]$, $D \in [AB]$ și $[AE] \equiv [NC]$; $E \in [AC] \Rightarrow \overline{AF} = \overline{AD} + \overline{AE} = \overline{MB} + \overline{NC} = 2\overline{QR}$;

7. $\overline{BN} = \frac{8}{15}\overline{BM} + \frac{7}{15}\overline{BP}$, $\frac{8}{15} + \frac{7}{15} = 1$; 8. $\overline{MN} = \frac{1}{4}\overline{MD}$; 9. $\overline{CF} = -2\overline{CE}$; 10. Fie O un punct în plan, atunci $\overline{SQ} = \overline{OQ} - \overline{OS} = \frac{1}{4}\overline{QD}$.

Teste de evaluare **pag. 260**

Testul 1. 1. $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AN}$, $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{BP}$; 2. $\overline{MO} = \frac{1}{2}(\overline{MA} + \overline{MC})$; 3. Fie Q , $\overline{GM} + \overline{GN} = \overline{GQ} \Rightarrow \overline{O} = \overline{GQ} + \overline{GP} \Rightarrow G, P, Q$ coliniare; $MGNQ$ romb; 4. Se duc prin P paralele la laturi și se formează triunghiuri echilaterale. **Testul 2.** 1. $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{AD} + \overline{DN}$, $\overline{MN} = \overline{MB} + \overline{BC} + \overline{CN}$ și se adună; 2. $\overline{BE} = -\overline{AB} + \frac{1}{2}\overline{AD}$; $\overline{RS} = -\frac{2}{3}\overline{BE}$; 3. $\overline{AB} = \overline{OB} - \overline{OA}$.

2. Coliniaritate, concurență, paralelism. Calcul vectorial în geometria plană

Vectorul de poziție. **pag. 275** 1. $\vec{r}_M = \frac{1}{4}\vec{r}_A + \frac{3}{4}\vec{r}_B$, $\vec{r}_P = \frac{4}{3}\vec{r}_A - \frac{1}{3}\vec{r}_B$. 2. $\vec{r}_M = \frac{5}{6}\vec{r}_A + \frac{1}{6}\vec{r}_B$. 3. $\frac{29}{42}\vec{r}_A + \frac{13}{42}\vec{r}_D$.

6. $\vec{r}_N = \frac{3}{5}\vec{r}_A + \frac{2}{5}\vec{r}_B$; $\vec{r}_N = \frac{5}{7}\vec{r}_A + \frac{2}{7}\vec{r}_C$; $\frac{21}{10}, \frac{175}{42}$. 8. Polul se ia A . 13. $\overline{OH_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, $\dots \overline{OH_1} + \overline{OD} + \overline{OE} = \overline{OH_2} + \overline{OE} + \overline{OA} = \dots \Rightarrow 3\overline{OG_1} = 3\overline{OG_2} = \dots \Rightarrow G_1 = G_2 = \dots$; 14. $\overline{MN} = \overline{MA} + \overline{MB}$, $\overline{MP} = \overline{MB} + \overline{MC}$, $\overline{MQ} = \overline{MC} + \overline{MA} \Rightarrow \sum \overline{MN} = 2\sum \overline{MA} \Rightarrow 3\overline{MG'} = 6\overline{MG}$; 15. $\sum \overline{IA} = \overline{IH} \Leftrightarrow \sum (\overline{IO} + \overline{OA}) = \overline{IO} + \overline{OH} \Leftrightarrow I = O$; 16. $\sum \overline{IA} = \sum (\overline{IO} + \overline{OA}) = 3\overline{IO} + \overline{OH} = 3(\overline{IH} + \overline{HO}) + \overline{OH}$; 17. $\overline{OH_1} = \overline{OA_1} + \overline{OA_2} + \overline{OA_3}$, $\overline{OH_2}, \overline{OH_3}, \overline{OH_4} \Rightarrow \overline{OH_2} - \overline{OH_1} = \overline{A_1A_4}$, $\overline{OH_4} - \overline{OH_3} = \overline{A_3A_2}$; 18. $\overline{OH_1} = \overline{OA} + \overline{OB} + \overline{OC}$, $\overline{OH_2} = \overline{OD} + \overline{OE} + \overline{OF} \Leftrightarrow \overline{OH_2} - \overline{OH_1} \Rightarrow 1$; 1) $\Rightarrow \overline{CD} + \overline{AF} + \overline{BE} = \overline{H_1H_2}$ și cum $\overline{AD} + \overline{BE} + \overline{CF} = \overline{H_1H_2} \Rightarrow 2$. 19. $\overline{OA} + (\overline{IO} + \overline{OB}) + (\overline{GO} + \overline{OC}) = \frac{2}{3}\overline{OH} \Rightarrow \frac{1}{3}\overline{OH} + \overline{IO} + \overline{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IO} = \vec{0}$, 20. $(\overline{HO} + \overline{OA}) + (\overline{IO} + \overline{OB}) + (\overline{GO} + \overline{OC}) = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{IO} + \overline{GO} = \vec{0} \Leftrightarrow \overline{GI} = 2\overline{OI}$. 22. $\sum (b+c)\overline{OA} = \vec{0} \Leftrightarrow (a+b+c)\sum \overline{OA} = \sum a\overline{OA} \Leftrightarrow \overline{OH} = \frac{1}{a+b+c}\sum a\overline{OA} \Leftrightarrow \overline{OH} = \vec{0}$.

Probleme de coliniaritate. **pag. 276** 1. Pentru $CC'B$ și punctele A, E, D aplicați reciproca teoremei lui Menelaos; 2. Teorema bisectoarei și reciproca teoremei lui Menelaos. 3. Se aplică Menelaos pentru triunghiul BMP și transversala AQR și pentru triunghiul ABR și transversala PQM , după care utilizăm reciproca lui Menelaos pentru triunghiul ARC și punctele B, Q, N . 4. Dacă $AB < AC$, atunci $B \in (AP)$, $N \in (AC)$. 5. Fie MNP triunghiul determinat de paralele duse prin vârfurile triunghiului ABC la laturile sale. Aplicați Menelaos pentru MNP și d și apoi, din reciproca lui Menelaos pentru triunghiul MNP și A_1, B_1, C_1 deduceți coliniaritatea. 6. Aplicați teorema lui Menelaos în ABA' pentru OGM și în $AA'C$ pentru GPM ; 7. Aplicați Menelaos pentru (ABC, POM) , (ADB, PNO) , unde $\{P\} = AB \cap MN$; 8. Caz particular al problemei 7. Punctul fix este punctul de inetrsecție al diagonalelor; 9. $AC \cap d = \{R\}$; se aplică Menelaos pentru (ABC, MNR) , (ADC, RPQ) și se face produsul relațiilor. 10. $\{N'\} = EP \cap AC$. Patrulaterul $NEMN'$ paralelogram, iar în triunghiul $EN'G$, $DP \parallel GN'$, D mijlocul lui $[GE]$.

Probleme de concurență. **pag. 277** 1. Teorema bisectoarei și reciproca teoremei lui Ceva; 2. Tangentele dintr-un punct exterior la cerc sunt egale; reciproca teoremei lui Ceva; 3. Se obține din b) pentru triunghiul IAB ; 4. Reciproca teoremei lui Ceva, utilizând triunghiuri asemenea și teorema catetei; 5. Puterea punctelor A, B, C față de cerc și reciproca teoremei lui Ceva; 6. Reciproca teoremei lui Ceva pentru AOO' .

Teste de evaluare **pag. 278**

Testul 1. 1. $\vec{r}_C = \frac{7}{9}\vec{r}_A + \frac{2}{9}\vec{r}_B$, $\vec{r}_D = \frac{4}{9}\vec{r}_A + \frac{5}{9}\vec{r}_B$; 2. $\overline{CP} = \alpha\overline{CA} + \beta\overline{CB}$; 3. Mijlocul lui $[AB]$, $\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_A + \vec{r}_B), \dots$; G centrul de greutate al triunghiului MPR are vectorul de poziție $\vec{r}_G = \frac{1}{3}(\vec{r}_M + \vec{r}_P + \vec{r}_R)$; 4. Menelaos pentru $(ABM, C'PC)$, $(ACN, B'QB)$; 5. Reciproca teoremei lui Ceva. **Testul 2.** 1. $\vec{r}_I =$

$\frac{5}{19}\vec{r}_A + \frac{6}{19}\vec{r}_B + \frac{8}{19}\vec{r}_C$; 2. $\overline{B_1C_1} = k\overline{B_1D_1}$. 3. Reciproca teoremei lui Ceva; 4. Teorema lui Menelaos pentru $(MAB, \overline{QSP}) \Rightarrow S$ mijlocul lui $[PQ]$; 5. În $\triangle ABD$, fie $\{G\} = AO \cap DN$. Atunci $G = M$.

3. Elemente de trigonometrie

Rezolvarea triunghiului dreptunghic. pag. 285 3. 1) $\frac{7\pi}{36}$; 2) $\frac{5\pi}{12}$; 3) $\frac{2\pi}{3}$; 4) $\frac{3\pi}{4}$; 5) $\frac{7\pi}{6}$; 6) $\frac{4\pi}{3}$; 7) $\frac{65\pi}{36}$; 8) $\frac{11\pi}{6}$; 4. 1) 15° ; 2) 12° ; 3) 120° ; 4) 210° ; 5) 240° ; 6) 315° ; 7) 330° ; 5. 1) $C = \frac{\pi}{6}$; $c = 15$, $b = 15\sqrt{3}$; 2) $b = 5$, $\sin B = \frac{5}{13}$, $C = \frac{\pi}{2} - B$; 3) $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 1$, $c = \frac{1}{2}$; 4) $a = 13$, $\sin B = \frac{12}{15}$, $C = \frac{\pi}{2} - B$; 5) $C = \frac{\pi}{6}$, $B = \frac{\pi}{3}$, $a = 3\sqrt{3}$; 7. Dacă un punct de pe exteriorul roții mari face unghiul θ_1 atunci arcul descris este $10\theta_1$; analog pentru roata mică $10\theta_2 \Rightarrow 10\theta_1 = 6\theta_2$; $10 \cdot 2\pi = 6\theta_2 \Leftrightarrow \theta_2 = \frac{10\pi}{3}$ sau $\theta_1 = 600^\circ$. 8. $\cos 30^\circ = \frac{x}{1,5} \Rightarrow x \approx 1,3m$.

Funcțiile sinus și cosinus. pag. 294 1. $\cos \alpha < 0$ și deci $\cos \alpha = -\sqrt{1 - \sin^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{2}}{3}$; 2. $\sin \alpha < 0$ și $\sin \alpha = -\sqrt{1 - \cos^2 \alpha} = -\frac{2\sqrt{6}}{5}$; 3. $\sin(-1830^\circ) = -\sin 1830^\circ = -\sin(5 \cdot 360^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ = -\frac{1}{2}$; $\cos(-\frac{81\pi}{4}) = \cos \frac{81\pi}{4} = \cos(20\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos(10 \cdot 2\pi + \frac{\pi}{4}) = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 4. 1) $-1 \leq \sin x \leq 1 \Rightarrow -1 \leq f(x) \leq 5$; 3) $0 \leq \sin^2 x \leq 1 \Rightarrow 5 \leq f(x) \leq 6$; 4) $f(x) = 4(\sin^2 x + \cos^2 x) + \cos^2 x = 4 + \cos^2 x$; $4 \leq f(x) \leq 5$; 6. Dacă $a = \sin^2 x$, $b = \cos^2 x$, atunci $a + b = 1$. Fie $a = \frac{1}{2} - \alpha$, $b = \frac{1}{2} + \alpha$, $\alpha > 0$. Atunci $a^2 + b^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{2} + 2\alpha^2 \geq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \alpha^2 > 0$, evident. Dar $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 \geq \frac{1}{4} - 2\frac{1}{16} = \frac{1}{8}$, unde $ab \leq (\frac{a+b}{2})^2 = \frac{1}{4}$ și $(ab)^2 \leq \frac{1}{16}$. Altfel $a^4 + b^4 = (a^2 + b^2)^2 - 2(ab)^2 = [(a+b)^2 - 2ab]^2 - 2(ab)^2 = (1 - 2ab)^2 - 2(ab)^2 = 2(ab)^2 - 4ab + 1$, $ab \in [0, \frac{1}{4}]$, etc. 11. $S = \sin^2(90^\circ - 1^\circ) + \dots = (1 - \cos^2 89^\circ) + \dots = 89 - S$. 12. $f(x + 4k) = f(x)$. 13. $x = y = \frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi) < 0$; $x = \frac{3\pi}{2}$, $y = -\frac{\pi}{2} \Rightarrow f(\pi) > 0$.

Funcțiile tangență și cotangență. pag. 299 1. 1) Se exprimă $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ în funcție de $\sin \alpha$, $\cos \alpha$ și se utilizează $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$. 6) În membrul stâng se grupează primul cu ultimul și al doilea cu al treilea termen. Altfel se dezvoltă membrul drept; 7) În membrul drept se scrie $\operatorname{tg} \alpha$, $\operatorname{ctg} \alpha$ conform definiției; 8) În membrul stâng exprimați $\operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg} x$ din definiție; 2. Din $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2}{5} \Rightarrow \sin \alpha = \frac{2}{5} \cos \alpha$ și se obține -12 . Altfel se împart numărătorul și numitorul prin $\cos \alpha$ și rezultă fracția $\frac{\operatorname{tg} \alpha + 2}{1 - 3\operatorname{tg} \alpha}$.

Relații între funcții trigonometrice. pag. 302 1. $1 \in (0, \frac{\pi}{2})$, $2, 3 \in (\frac{\pi}{2}, \pi)$, $4 \in (\pi, \frac{3\pi}{2})$, $5, 6 \in (\frac{3\pi}{2}, 2\pi)$; 1) $\sin \alpha = 0$, $\sin \alpha = 3$; $\sin \alpha = 0$ dacă $\alpha \in \{0, \pi\} \subset [0, 2\pi)$; $\alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; $\sin \alpha = 3 \notin [-1, 1]$, ecuație imposibilă; 2) $\sin \alpha = 1$, $\alpha = \frac{\pi}{2} \in [0, 2\pi)$; $\alpha = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 3) $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}\}$; $\alpha \in \{\frac{k\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$; 4) $\cos \alpha = -1$, $\alpha = \pi \in [0, 2\pi)$; $\alpha = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$; 5) $\alpha \in \{0, \frac{\pi}{3}, \pi, \frac{4\pi}{3}\} \subset [0, 2\pi)$; $\alpha \in \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\} \cup \{\frac{\pi}{3} + k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$; 3. 1) $\sin \alpha = -\frac{4}{5}$, $\operatorname{tg} \alpha = \frac{4}{3}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{3}{4}$; 2) $\cos \alpha = \frac{5}{13}$, $\operatorname{tg} \alpha = -\frac{12}{5}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{5}{12}$; 4) $\frac{125}{78}$; 5) 2;2;0; 6) $-\frac{3}{2}$; 5. 1) $\sin \alpha = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\operatorname{tg} \alpha = -2\sqrt{2}$, $\operatorname{ctg} \alpha = -\frac{\sqrt{2}}{4}$; 2) $\sin \alpha = -\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $\cos \alpha = -\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\operatorname{ctg} \alpha = \frac{1}{3}$;

Formule pentru suma și diferența a două unghiuri. pag. 309 1. $\cos 75^\circ = \cos(45^\circ + 30^\circ)$; $\sin 15^\circ = \sin(45^\circ - 30^\circ)$, $\sin 105^\circ = \sin(90^\circ + 15^\circ) = \cos 15^\circ = \cos(45^\circ - 30^\circ)$; $\sin 135^\circ = \sin(90^\circ + 45^\circ) = \cos 45^\circ$, $\sin 210^\circ = \sin(180^\circ + 30^\circ) = -\sin 30^\circ$; 2. 1) $\sin(49^\circ + 11^\circ) = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$; 2) $\sin(57^\circ - 12^\circ) = \sin 45^\circ = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3. 1) $\cos a = \frac{2\sqrt{2}}{3}$, $\cos b = \frac{2\sqrt{6}}{5}$;

2) $\cos a = \frac{\sqrt{5}}{3}$, $\sin b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$; 3) $\sin a = \frac{2\sqrt{6}}{5}$, $\cos b = -\frac{4}{5}$; 4) $\sin a = -\frac{4\sqrt{3}}{7}$, $\sin b = -\frac{2\sqrt{10}}{7}$; 4. 1) $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{ctg} \alpha$; 2) 1; 3) $\cos^2 b - \sin^2 b$; 4) $2 \cos x \cos y$, $-2 \sin x \sin y$; 5) $2 \sin x \cos y$, $2 \sin y \cos x$; 6) 0. 7. $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{23}$; 9. $\cos(a - b) = \frac{1}{2}$, $a, b \in I$ sau $a, b \in IV$; 10. Se adună și se scad relațiile din ipoteză și rezultă $\cos \alpha \cos \beta = \frac{4}{15}$, $\sin \alpha \sin \beta = -\frac{1}{15}$. De aici $\operatorname{tg} \alpha \operatorname{tg} \beta = -\frac{1}{4}$; 11. $\operatorname{tg} \alpha = x$, $\operatorname{tg} \beta = y$ și rezultă sistemul $x + y = 2$, $xy = \frac{1}{2}$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{2 - \sqrt{2}}{2}$, $\operatorname{tg} \beta = \frac{2 + \sqrt{2}}{2}$; 12. Se dezvoltă $\operatorname{tg}[(\alpha + \beta) + \gamma]$ și apoi $\operatorname{tg}(\alpha + \beta)$; 14. Se utilizează relația $2 \sin x \cos x = \sin 2x$ și se restrânge produsul din stânga inegalității; 15. Se scrie $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$ în egalitate, care se reduce la $\sin(B + C) = 1$; se scrie $A = \pi - (B + C)$ și deci $\sin A = \sin(B + C)$, iar relația se reduce la $\sin(B - C) = 0$.

Funcțiile trigonometrice ale argumentului dublu și triplu [pag. 314] 4. 1) Se înmulțește egalitatea prin $\cos 10^\circ$, se scriu $\sin 50^\circ = \cos 40^\circ$, $\sin 70^\circ = \cos 20^\circ$ și se utilizează relația $2 \sin x \cos x = \sin 2x$; 2) Se înmulțește egalitatea prin $\sin 20^\circ$ etc. 5. Se aduce funcția la forma $f(x) = 2 \cos^2 x + 5 \cos x - 1$ și se ține seama că $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-4 \leq f(x) \leq 6$; 6. 1) $f(\cos \alpha) = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha - 1$; $m \leq -\frac{9}{8}$, $M \geq 2$; 2) $m \leq 1$, $M \geq 2$. 7. 0. 10. 2) $\cos x < \frac{1}{2} \left(\cos x + \cos \frac{x}{3} \right) \Leftrightarrow \cos x < \cos \frac{x}{3}$ deoarece $0 < \frac{x}{3} < x < \pi$ și funcția cosinus este strict descrescătoare pe $[0, \pi]$.

Substituția universală. [pag. 317] 1. $\sin 2\alpha = \frac{4}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{3}{5}$, $\operatorname{tg} 2\alpha = -\frac{4}{3}$; 2. $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = 2$; 3. $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{12}{5}$, $\operatorname{tg} 4\alpha = -\frac{120}{119}$; 4. $0 < \alpha < \frac{\pi}{4} \Rightarrow \sin \alpha < \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2}$; $\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{1}{3}$; 5. $\sin 2\alpha = \frac{3}{5}$, $\cos 2\alpha = -\frac{4}{5}$, $\sin 4\alpha = -\frac{24}{25}$, $\cos 4\alpha = \frac{7}{25}$; 6. 1) $\frac{5}{101}$; 2) $-\frac{4}{225}$; 7. $\sin x = -\frac{3}{5}$, $\cos x = -\frac{4}{5}$, $\sin y = \frac{8}{17}$, $\cos y = -\frac{15}{17}$; 9. $g(t) = \frac{4t}{1+t^2} - \frac{5(1-t^2)}{1+t^2}$, $t = \operatorname{tg} \frac{x}{2}$; $g(t) = y \Leftrightarrow (5-y)t^2 + 4t - 5 - y = 0$, ecuație care are soluții reale dacă $\Delta_t \geq 0 \Leftrightarrow y \in [-\sqrt{29}, \sqrt{29}]$; 11. Inducție matematică.

Transformarea sumelor în produse [pag. 319] 2. 1) $(\cos 0 + \cos 2\alpha) + \cos \alpha = 2 \cos^2 \alpha + \cos \alpha = 2 \cos \alpha \left(\cos \alpha + \cos \frac{\pi}{3} \right) = 4 \cos \alpha \cos \left(\frac{\alpha}{2} + \frac{\pi}{6} \right) \cos \left(\frac{\alpha}{2} - \frac{\pi}{6} \right)$. 6. 1) După transformarea sumelor din membrul stâng în produse rezultă $\operatorname{ctg} \frac{C}{2} = \sin C$ sau $\cos C = 0 \Rightarrow C = \frac{\pi}{2}$; 2) $A = \pi - (B + C)$ și se transformă suma de sinusuri în produs, iar $\cos(C - B) = \cos B \cos C + \sin C \sin B$ și egalitatea devine $\operatorname{tg} B = \frac{1}{2}(\operatorname{ctg} C + \operatorname{tg} B) \Leftrightarrow \cos(B + C) = 0 \Leftrightarrow B + C = \frac{\pi}{2}$; 3) $\sin^2 A = \frac{1 - \cos 2A}{2}$; 9. $\sin \frac{x+y}{2} = t$ și se obține trinom de gradul doi în t .

4. Aplicații ale produsului scalar a doi vectori și ale trigonometriei în geometrie

Produsul scalar a doi vectori [pag. 332] 1. a) $3\sqrt{2}$; b) $10\sqrt{3}$; c) 0; d) 6; e) 24; f) $3\sqrt{3}$; 2. $|\vec{a}|^2 = \vec{a} \cdot \vec{a}$; 3. $a_b = \frac{3\sqrt{2}}{2}$, $b_a = 2\sqrt{2}$; 4. $|\vec{a} + \vec{b}|^2 = 13 + 6\sqrt{3} \Rightarrow |\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{13 + 6\sqrt{3}}$; 5. $\overline{ED} \cdot \overline{EC} = 0$; 6. $\overline{AB} = \vec{a}$, $\overline{AD} = \vec{b}$; 7. $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CA} = \vec{0}$ se ridică la pătrat; 8. $\sqrt{25 - 12\sqrt{2}}$; 9. $\frac{\pi}{6}$. 10. a) obtuzunghic în C ; b) Dreptunghic în C ; e) asușitunghic; 11. Teorema cosinusului; 12. Teorema medianei; 13. Teorema cosinusului; 14. $\vec{r}_M = \frac{1}{2}(\vec{r}_B + \vec{r}_C)$, $\overline{BC} = \vec{r}_C - \vec{r}_B$; 15. $GA = \frac{2}{3}m_a$ plus teorema medianei; 17. Relația lui Stewart în AOA' , A' mijlocul lui $[BC]$; 19. Din relația lui Stewart se exprimă AM^2 ; 20. Teorema medianei pentru LM , LN , LP , LQ .

Teste de evaluare [pag. 352]

Testul 1. 1. $AC^2 + BD^2 = 2(AB^2 + BC^2)$. 2. $AG^2 + GC^2 = BC^2$. 3. 1) Se exprimă cosinusurile din teorema cosinusului; 2) $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}$. 4. $l_a = l_b \Leftrightarrow a = b$. 6. $a = 2R \sin A, \dots$ 7. $\operatorname{tg} B = \frac{\sin B}{\cos B}$. 8. $h_a = \frac{2pr}{a} =$

$= r \left(1 + \frac{b}{a} + \frac{c}{a} \right)$. **Testul 2.** 1. Teorema cosinusului pentru BC și CD . 2. Teorema cosinusului pentru toate segmentele (în funcție de $\cos A$). 3. Se scrie $\cos A$ în funcție de laturi. 5. Teorema medianei în triunghiurile ADC , ABC , ABD , BDC și AFC , BDE . 6. $a = 2R \sin A$, ... și se rescrie ipoteza. 7. Se transformă sumele în produse. 8. $OA_1 = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$, 9. $m_a \leq R + OA_1$, A_1 este mijlocul lui $[BC]$; $\sum \frac{1}{h_a} = \frac{1}{r}$; $\sum \frac{OA_1}{h_a} = 1$. **Testul 3** 1. $(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{DC}) = 0$. 2. Utilizați relația lui Leibniz. 3. $(BC - AB)\overrightarrow{GA} + (AC - AB)\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Rightarrow BC = AB$ și $AC = AB$. 4. $\vec{r}_A + \vec{r}_B = \vec{r}_C + \vec{r}_D$ și se calculează \vec{r}_D^2 . 6. $a = 2R \sin A$. 7. $a = 2R \sin A$, 8. $a + b \geq 2\sqrt{ab}$. 9. Se ia înălțimea $[CC']$ și $\text{ctg} A + \text{ctg} B \geq \frac{AB}{CC'} \geq \frac{AB}{CC_1}$, $[CC_1]$ este mediană.

Teste de recapitulare finală

pag. 355 Testul 1. 1. $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2} \notin \mathbb{Z}$, $y = 0 \in \mathbb{Z}$; falsă; 2. $m \in (1, 5)$; 3. a) $a = 2$, $b = 6$, $c = 18$ sau $a = 18$, $b = 6$, $c = 2$; b) b ; 4. $x_1^2 = 4x_1 - 1 \Rightarrow x_1^2 = 4x_1^2 - x_1 = 4(4x_1 - 1) - x_1$; 5. a) $m \in \{0, 1\}$; b) $m \in [-4, 0]$; 6. 1) $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = 2\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{CB} + \overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{CF}$, $\overrightarrow{FA} + \overrightarrow{FC} = 2\overrightarrow{FE}$; 2) $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BD} = (\overrightarrow{AM} + \overrightarrow{MC}) + (\overrightarrow{BM} + \overrightarrow{MD}) = \overrightarrow{MC} + \overrightarrow{MD} = 2\overrightarrow{MN}$; 7. $\{A''\} = AA' \cap BC$. Se exprimă segmentele care apar în teorema lui Ceva, utilizând teorema sinusurilor, apoi $B'A = AB \cos A$, iar AC' din teorema bisectoarei; 9. Din ipoteză, $\sin x \cos x = \frac{1}{3}$ și deci $\sin 2x = \frac{2}{3}$, $\cos 4x = \frac{1}{9}$; 10. $m(\widehat{ADC}) = x$. Teorema sinusurilor aplicată în triunghiurile ADC , BCD implică $\frac{\sin B}{\sin A} = \frac{\sin(x - B)}{\sin(x + A)}$. Se fac dezvoltările și apoi se împarte prin $\sin A \sin B \sin x$ și rezultă $\text{ctg} x = \frac{1}{2}(\text{ctg} B - \text{ctg} A)$; 11. $\frac{2}{3}\sqrt{3\text{Stg}\frac{\alpha}{2}}$; 12. $\bar{a} + \bar{b}$, $\bar{a} - \bar{b}$ sunt diagonalele paralelogramului de laturi \bar{a} , \bar{b} ; $|\bar{a} + \bar{b}| = |\bar{a} - \bar{b}| \Rightarrow$ dreptunghi; 13. $\overline{AA_1} = \bar{m}_1$, $\overline{BB_1} = \bar{m}_2$, $m_1 = \bar{c} + \frac{1}{2}\bar{a}$, $\bar{m}_2 = \bar{a} + \frac{\bar{b}}{2}$, $\overline{BC} = \bar{a}$, $\overline{CA} = \bar{b}$, $\overline{AB} = \bar{c}$ și după calcule $\bar{m}_1\bar{m}_2 = \frac{1}{8}(a^2 + b^2 - 5c^2) = 0$; 14. $h_a, h_b, h_c \in \{1, 2, 3\}$. Arătați că înălțimile nu pot fi distincte utilizând $ah_a = bh_b = ch_c = 2S$; 15. $S_i, i = \overline{1, 7}$ ariile celor șapte figuri determinate de drepte și S aria triunghiului; $S_3 + (S_2 + S_7) = \frac{1}{2}S = S_1 + S_6 + (S_2 + S_7) \Rightarrow S_3 = S_1 + S_6$; $\frac{1}{2}S = S_1 + S_2 + S_3 + S_4 \Rightarrow \frac{1}{2}S = 2S_1 + S_2 + S_4 + S_6 \geq 2S_1$.

Testul 2. 1. $x, (y) = x + \frac{y}{9}$, $x, y(z) = x + \frac{10y + z - y}{90}$; 2. a) $(-1, 5)$; b) $f_m(2) = 5 \Rightarrow m = -2$; 4. $m = 2$; 5. $-\frac{b}{2a} = -\frac{m}{2} \leq 2$, $3m + 4 \leq 2 + 2m$; $m \in [-4, -2]$; 6. Se consideră mijloacele coardelor; 7. Teorema bisectoarei în BMC , CMA , AMB plus reciproca teoremei lui Ceva; 8. $\frac{\sin 20^\circ}{\cos 20^\circ} + 4 \sin 20^\circ = \frac{\sin 20^\circ + 2 \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ} = \frac{(\sin 20^\circ + \sin 40^\circ) + \sin 40^\circ}{\cos 20^\circ}$; 10. $m(\widehat{BAM}) = m(\widehat{CAN}) = \alpha$, $m(\widehat{MAN}) = \beta$. Aplicați teorema sinusurilor în perechile de triunghiuri (AMB, ACM) și (ABN, ACN) ; 11. $\frac{1}{3}\sqrt{S \sin 2\alpha}$; 12. $\bar{c} = \alpha(\bar{a} + \bar{b})$, $\bar{b} + \bar{c} = \beta\bar{a} \Rightarrow \alpha = \beta = 1$,

adică $\bar{c} = -\bar{a} - \bar{b}$; 13. $\overline{BA} \cdot \overline{BD} \Rightarrow 30^\circ$; 14. Exprimați $\frac{S_1}{S}$, $\frac{S_2}{S}$ și apoi folosiți inegalitatea $\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{2}} \geq \frac{x + y}{2}$; 15.

Duceți liniile mijlocii în pătrat. **Testul 3.** 1. Prin reducere la absurd; 2. $f : [-1, 2] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = -\frac{2}{3}x + \frac{7}{3}$; $f\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{3}$; 3. d); 4. b); 5. a); 6. 1) $[IJ]$ mediană în $\triangle AJC$; 2) paralelogram; 7. Prin reducere la absurd;

9. $\sin A = \frac{a}{2R}$, $\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$; $\sin(B + C) = 2 \sin B \cos C \Leftrightarrow \sin(B - C) = 0$; 10. Aplicați teorema sinusurilor în triunghiurile OAM , OAN ; 11. $\overline{AB} = \frac{9\bar{a}}{8} - \frac{3}{8}\bar{b}$, $\overline{AD} = \frac{9}{8}\bar{b} - \frac{3}{8}\bar{a}$, $\overline{MN} = \bar{b} - \bar{a}$, $\overline{BD} = \frac{3}{2}\bar{b} - \frac{3}{2}\bar{a}$;

12. $\overline{AM} = \frac{7}{8}\overline{AB} - \frac{1}{2}\overline{CN} \Rightarrow \overline{AB} = \frac{8}{7}\overline{AM} + \frac{4}{7}\overline{CN} \Rightarrow \overline{AB}^2 = 112$; 13. Se aplică problema 14 de la testul 2; 14. $c > |b - a| \Leftrightarrow \frac{2S}{h_c} > \left| \frac{2S}{h_b} - \frac{2S}{h_a} \right| \Rightarrow h_c < 30$; 15. $4(1 + \sqrt{2} + \sqrt{5})$.