§5. **Inegalități**

5.1. Proprietățile inegalităților

În §2, pct. 2.2 am definit **ordinea pe mulțimea numerelor reale** folosind reprezentarea zecimală a acestora.
Mai precis, dacă *a* şi *b* sunt doua numere reale am definit ce înseamnă $a < b$ (*a* mai mic decât *b*).
În continuare vom da unele ***proprietăți ale inegalităților între numere***, care se deduc uşor pe baza definiției menționate.
Este adevărată următoarea **proprietate** numită **legea de *tricotomie***:

Dacă *a* şi *b* sunt două numere reale, atunci **este adevărată una şi numai una** din relațiile:

$$a > b \;\; ; \;\; a = b \;\; ; \;\; a < b.$$

Se spune *că numărul real* **a** ***este mai mic sau egal cu*** *umărul real* **b**, *şi scriem* $a \le b$ dacă $a < b$ sau $a = b$

Relația „$\le$" are următoarele **proprietăți**:

1° $a \le a$, oricare ar fi a (***reflexivitatea***).
2° dacă $a \le b$ şi $b \le a$, atunci $a = b$ (***antisimetria***).
3° dacă $a \le b$ şi $b \le c$, atunci $a \le c$ (***tranzitivitatea***).

Această relație se numeşte ***relația de ordine*** pe mulțimea numerelor reale.

Observăm că proprietatea 3° (**tranzitivitatea**) este valabilă şi pentru relația „$<$“,
adică dacă $a < b$ şi $b < c$, atunci $a < c$.

<u>Alte proprietăți ale inegalităților</u> pe mulțimea numerelor reale legate de operațiile de adunare şi înmulțire.
Astfel:

1° dacă $a < b$, iar c este un număr real oarecare, atunci: $a + c < b + c$,
2° dacă $a < b$ şi $c > 0$, atunci: $a \cdot c < b \cdot c$
3° dacă $a < b$ şi $c < 0$, atunci : $a \cdot c > b \cdot c$
De aici rezultă uşor că:
4° dacă $a < b$ şi $c < d$, atunci $a + c < b + d$ şi $a - d < b - c$,
5° dacă $a, b, c, d > 0$ astfel încât $a < b$ şi $c < d$, atunci $a \cdot c < b \cdot d$.

în aceleaşi condiții, avem şi : $\frac{a}{d} < \frac{b}{c}$

.

Aceleaşi proprietăți **(1°, 2°, 3°, 4°, 5°)** **<u>sunt valabile</u>** şi pentru relația „ $\leq$ ".

<u>Observație.</u>
Dacă a, b sunt numere reale, atunci: $a \leq b \iff$ există $c > 0$,număr real ,astfel încât : $b = a + c$.

În continuare, vom prezenta câteva **inegalități remarcabile**.

Acestea se pot generaliza după cum se va vedea în paragraful consacrat inducției matematice

1.) Să se demonstreze

$$(a^2 + b^2)(u^2 + v^2) \geq (au + bv)^2$$

(1)

unde *a, b, u, v* sunt numere reale oarecare.

(inegalitatea Cauchy - Buniakowsky - Schwartz)

2.) Să se demonstreze

$$\sqrt{a^2+b^2} + \sqrt{u^2+v^2} \geq \sqrt{(a+u)^2 + (b+v)^2}$$

(2)

unde *a, b, u, v* sunt numere reale oarecare.

(**inegalitatea lui Minkovski**).

3. Să se demonstreze **(inegalitatea mediilor)**

$$\frac{a+b}{2} \geq \sqrt{ab} \geq \frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}}$$

(3)

unde ***a , b >0***

(*media aritmetică* a două numere pozitive este *mai mare* sau egală cu *media geometrică* a lor și este *mai mare* sau egală cu *media armonică*).

Studiu individual

Demonstrația

manual : pag 21