

Cap.I MATRICE

No iunea de matrice st la baza algebrei liniare. S-a ajuns la conceptul matematic de matrice printr-un proces de abstractizare, pornind de la tabelele de tip matriceal.

Prin tabel de tip matriceal în elegem un tabel dreptunghiular de numere reale sau complexe.

Un astfel de tabel apare în lucrarea unui matematician chinez cu două secole înaintea erei noastre (în legătură cu rezolvarea unei probleme ce conducea la un sistem liniar). **Termenul de matrice a fost introdus abia în 1850**, de către matematicianul **James Joseph Sylvester** (1814 - 1897).

Aplicațiile matematice ale matricelor sunt legate de sistemele liniare și de transformările geometrice. În același timp, matricele au aplicații în domenii variate cum sunt: teoria comunicării, analiza vibrațiilor corpurilor în mișcare, grafica pe calculator etc.

TABELE DE TIP MATRICEAL. MATRICE. MULȚIMI DE MATRICE

Vom considera mai întâi câteva exemple de tabele de tip matriceal.

Tabelele de tip matriceal (tabele cu dublă intrare) **apar** în situații în care este necesară **o clasificare a unor date numerice după două criterii.**

Exemple. 1. Într-o întreprindere care are 3 secții se face o clasificare a personalului pe grupe de vârstă, completându-se un tabel matriceal de tipul următor:

Secția	Vârsta	sub 30 ani	30 - 39 ani	40 - 49 ani	50 - 59 ani	peste 60 ani
1		5	2	3	2	1
2		3	3	4	5	0
3		10	6	2	4	2

Utilitatea unui astfel de tabel constă în faptul că datele sunt prezentate într-o formă organizată, orice informație găindu-se mai ușor decât dacă statistica ar fi constatată într-o simplă enumerare.

Astfel, dacă dorim să aflăm numărul salariilor celor din secția a treia, facem suma elementelor din linia a treia a tabelului.

Dacă dorim să aflăm numărul salariilor din întreprindere care au vârsta cuprinsă între 30 și 39 de ani, facem suma elementelor din coloana a doua a tabelului.

EX.2. Este util să cunoaștem distanțele ce există între oricare două capitale europene.

Pentru ușurința calculării, aceste distanțe se pot organiza sub forma unui tabel matriceal.

Iată un fragment dintr-un astfel de tabel:

	Amsterdam	Atena	Belgrad	Berlin
Amsterdam	0	2821	1764	659
Atena	2821	0	1040	2316
Belgrad	1764	1040	0	1276
Berlin	659	2316	1276	0

Distanța în kilometri dintre localitățile X și Y poate fi găsită la intersecția liniei corespunzătoare lui X cu coloana corespunzătoare lui Y .

EX.3. Forma generală a unui sistem liniar de două ecuații cu două necunoscute este:

$$\begin{cases} ax + by = c \\ dx + ey = f \end{cases}$$

Coeficienții necunoscutelor formează tabelul de două linii și două coloane

$$\begin{pmatrix} a & b \\ d & e \end{pmatrix}$$

Adăugând și coloana termenilor liberi se obține tabelul cu două linii și trei coloane

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}$$

care determină în mod unic sistemul.

Dacă dorim să dăm forma generală a unui sistem liniar cu **m ecuații** și **n necunoscute** (notate x_1, x_2, \dots, x_n), trebuie utilizate **notații convenabile** pentru coeficienții necunoscuților și pentru termenii liberi.

Vom nota coeficienții cu doi indici, **primul** arată **din a câta ecuație face parte coeficientul**, iar **al doilea** indice arată **necunoscuta care îi corespunde coeficientul** considerat.

Scriem astfel sistemul sub forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

a_{11}	a_{12}	...	a_{1n}
a_{21}	a_{22}	...	a_{2n}
...
a_{m1}	a_{m2}	...	a_{mn}



Defini ia matricei

Fie m și n , două numere naturale nenule.

Se numește **matrice** de tip (m, n) cu elemente complexe, **orică funcție** $A : \{1, 2, \dots, m\} \times \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{C}$.

Domeniul de definiție este $D = \{(i, j) \mid i \in \{1, 2, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots, n\}\}$.

Oricărei perechi $(i, j) \in D$, îi corespunde prin funcția A , un număr complex $A(i, j)$, pe care îl notăm a_{ij} .

O matrice de tip (m, n) se scrie sub forma

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Elementul a_{ij} este situat la **intersecția liniei i cu coloana j** .

Se folosesc și notațiile

$$A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq j \leq n}} \quad \text{sau} \quad A = (a_{ij}).$$

O matrice de tip (m, n) este numită *matrice cu m linii și n coloane*.

• Mulțimea matricelor de tip (m, n) cu coeficienți complecși se notează $M_{m,n}(\mathbb{C})$ sau $M_{m \times n}(\mathbb{C})$.

Analog se definesc mulțimile $M_{m,n}(\mathbb{R})$ (mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente reale), $M_{m,n}(\mathbb{Q})$ (mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente raționale), $M_{m,n}(\mathbb{Z})$ (mulțimea matricelor cu m linii și n coloane cu elemente întregi).

Între aceste mulțimi de matrice există relațiile evidente:

$$M_{m,n}(\mathbb{Z}) \subset M_{m,n}(\mathbb{Q}) \subset M_{m,n}(\mathbb{R}) \subset M_{m,n}(\mathbb{C})$$



Defini ie: Fie matricele

$$A \in M_{m,n}(C), A = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$$

$$B \in M_{p,q}(C), B = (b_{ij})_{\substack{i=1,p \\ j=1,q}}$$

Spunem c matricele **A i B sunt egale** dac :

m=p, n = q (adic **matricele sunt de acela i tip**) i **a_{ij} = b_{ij}**, pentru orice pereche (i,j) cu i ∈ {1, 2, ..., m} i j ∈ {1,2,...,n},

Transpusa unei matrice

Unei matrice $A \in M_{m,n}(C), A = (a_{ij})_{\substack{i=1,m \\ j=1,n}}$

putem s -i asociem o nou matrice numit **transpusa lui A** i notat

$${}^t A \in M_{n,m}(C)$$

Astfel dac :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

atunci:

$${}^t A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Observ m c **matricea transpus**, se ob ine din matricea **A**, **transformând liniile în coloane**

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \Rightarrow {}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Observa ie. Pentru transpusa matricei A se folose te i nota ia **A***.

Cazuri particulare de matrice

O matrice de forma: $A \in M_{1,n}(C), A = (a_{11}, a_{12}, \dots, a_{1n})$

se nume te **matrice linie** sau **vector linie**.

O matrice de forma:

$$A \in M_{m,1}(C), A = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{pmatrix}$$

se nume te **matrice coloan** sau **vector coloan**.

O matrice în care numrul liniilor coincide cu numrul coloanelor se nume te **matrice p trat**

Mul imea matricelor p trate de ordinul n cu elemente complexe se noteaz cu $M_n(C)$.

Analog, se folosesc nota iile $M_n(R), M_n(Q), M_n(Z)$ pentru mul imile de matrice p trate de ordinul n cu elemente reale, rati onale sau întregi.

Pentru $A \in M_n(C), A = (a_{ij})$

diagonala principal este format din elementele $a_{11}; a_{22}; \dots; a_{nn}$, i

diagonala secundar este format din elementele $a_{1,n}; a_{2,n-1}; \dots; a_{n,1}$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Not m :

$$Tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn}$$

“urma “matricei A

(din englez : trace=urm)

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Tr}(A) = 1 + 2 + 3 + 4 = 10$$

O matrice egal cu transpusa ei se nume te *matrice simetric*

Exemplu:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \quad i \quad {}^tA = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 3 & 4 \\ 4 & 4 & 4 & 4 \end{pmatrix} \Rightarrow A = {}^tA$$

EXERCIIII DE ÎNII IERE

1.) Următorul tabel matriceal (*completat numai parțial*) sintetizează numărul de piese de trei tipuri realizate într-o zi în cele două secții ale unei întreprinderi. Completați toate rubricile tabelului.

	Piese tip A	Piese tip B	Piese tip C	Total
Secția 1	20	25		70
Secția 2	15		60	
Total				150

2.) Aflați valorile lui $x, y \in \mathbb{R}$ cu proprietatea:

$$a) \begin{pmatrix} x-1 & 0 \\ 1 & x+y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad b) \begin{pmatrix} x^2+x+1 & x^2 \\ y & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & y^2+1 \end{pmatrix}$$

3.) Se consideră matricea


$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 3 & 1 & 6 \\ 2 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

a) Care sunt elementele diagonalei principale ?
b) Care sunt elementele diagonalei secundare ?
c) Aflați urma matricei.
d) Scrieți transpusa matricei.

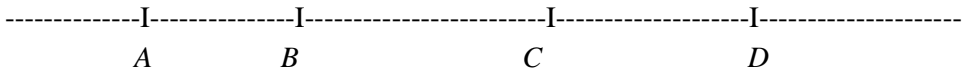
4.) Aflați numerele $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ fiindcă matricea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 \\ a & 5 & 6 \\ b & c & d \end{pmatrix}$$

este egală cu transpusa ei, iar urma matricei A este 10.

PROBLEME PROBLEME PROBLEME 

1.) Pe o osea rectilinie sunt aezate patru localiti A, B, C, D ca în figur .



Urm torul tabel matriceal sistematizeaz distan ele (m surate în kilometri) între oricare dou localiti din mul imea A, B, C, D. Tabelul a fost completat par ial.

	A	B	C	D
A	0	10		
B			30	
C				
D	60			

Completa i toate rubricile tabelului.

2.) Se consider matricea $A \in M_3(\mathbb{Z})$, $A = (a_{ij})_{\substack{1 \leq i \leq 3 \\ 1 \leq j \leq 3}}$; $a_{ij} = 2i + j$

- a) Care sunt elementele diagonalei principale ?
- b) Care sunt elementele diagonalei secundare ?
- c) Afla i urma matricei.
- d) Scrie i transpusa matricei A.

3.) Se d sistemul liniar $\begin{cases} x - y + 3z = 3 \\ 2x + 4y - z = -1 \\ x - 2y = 0 \end{cases}$ Scrie i matricea coeficien ilor i matricea termenilor liberi.

4.) Se consider matricele: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,4}(\mathbb{R})$ i $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R})$

Alc tui i sistemul de ecua ii liniare cu necunoscutele x, y, z, t care are matricea coeficien ilor egal cu A i matricea termenilor liberi egal cu B

5.) Afla $x, y, z \in \mathbb{R}$ cu proprietatea
$$\begin{pmatrix} x-y & 1 \\ x+3y & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 & y+z \\ 4 & x-y \end{pmatrix}$$

6.) Afla $x, y, z, u \in \mathbb{C}$ cu proprietatea
$$\begin{pmatrix} ix & -2i \\ z & 2i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & x+iy \\ u & z+u \end{pmatrix}$$

7.) Afla a, b, c pentru care matricea
$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ a & 4 & 5 \\ b & c & 6 \end{pmatrix}$$
 este egală cu transpusa ei.

8.) Scrie matricele \mathbf{A} și $\mathbf{B} = {}^t\mathbf{A}$ dacă matricea $A \in M_{2,3}(\mathbb{Z}), A = (a_{ij}); a_{ij} = i$ cu $i \in \{1,2\}; j \in \{1,2,3\}$

9.) Se consideră matricele $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in M_4(\mathbb{Z})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}; B = (b_{ij})_{1 \leq i, j \leq 4}$

$$a_{ij} = ij; b_{ij} = \begin{cases} i, & i = j \\ 0, & i > j \\ -1, & i < j \end{cases}$$

a) Afla urmele celor două matrice.

b) Stabiliți dacă matricele sunt simetrice.

10. Câte matrice patratice de ordinul al doilea au elementele din mulimea $\{0,1, 2\}$?
11. Câte matrice cu cinci linii și apte coloane au elementele din mulimea $\{1,2, \dots,10\}$?
12. Fie $A \in M_3(\mathbb{Z})$, o matrice simetrică cu proprietatea că fiecare linie este o permutare a mulțimii $\{1, 2, 3\}$. Arătați că diagonală principală a lui A are aceeași proprietate.