Cap. III SISTEME DE ECUAŢII LINIARE

INVERSA UNEI MATRICE

Studiind operaţiile cu matrice din mulţimea $M_n(C)$, s-au constatat analogii între proprietăţile operaţiilor cu matrice şi proprietăţile operaţiilor cu numere complexe.

In mulţimea numerelor complexe, orice număr nenul este inversabil, adică: $\forall z \in C^*, \exists z^{-1} \in C^*$ cu $zz^{-1} = z^{-1}z = 1$.

Este normal să ne punem problema de a identifica matricele inversabile şi de a găsi procedeul de calcul al inversei unei matrice, când aceasta există.

Definiţie

Fie $A \in M_n(C)$. Spunem că matricea ***A* este** ***inversabilă*** dacă există o matrice $\boxed{A^{-1} \in M_n(C)}$ astfel încât: $\boxed{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$

în acest caz ***A*** $^{-1}$ se numeşte **inversa** matricei *A.*

Exemple.

1. Fie $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ Cercetăm dacă matricea *A* este inversabilă.
Căutăm

Notăm $X = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$; $\mathrm{AX} = \mathrm{I}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2u = 1 \\ y + 2v = 0 \\ 3u = 0 \\ 3v = 1 \end{cases} \Rightarrow x = 1, y = -\frac{2}{3}, u = 0, v = \frac{1}{3} \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix} = A^{-1}$

Se verifică si relaţia $XA^{-1} = I_2$

2. Fie $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$

Cercetăm dacă matricea *B* este inversabilă.
Căutăm o matrice pătrată de ordinul al doilea **Y**, astfel încât **BY=YB=** $\mathbf{I_2}$

Notăm $Y = \begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix}$; $\mathrm{BY} = \mathrm{I}_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ u & v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x + 2u = 1 \\ y + 2v = 0 \\ 2x + 4u = 0 \\ 2y + 4v = 1 \end{cases}$

Dar, se observă că acest sistem nu are soluţie pentru că din ecuaţia a treia obţinem $x + 2u = 0$, ceea ce este în *contradicţie* cu prima ecuaţie. Rezultă că matricea *B* nu este inversabilă.

Este important **să găsim un criteriu** prin care **să putem decide dacă o matrice este sau nu inversabilă**, iar în cazul în care răspunsul este afirmativ, **să găsim un algoritm** prin care să aflăm inversa (metoda din exemplele de mai sus este incomodă în cazul matricelor de ordinul 3).

Definiţie

Fie $A \in M_n(C)$, unde n *e* {2, 3}. Se numeşte **adjuncta matricei *A***, matricea notată **A*** $\in M_n(C)$ ale cărei elemente sunt **complemenţii algebrici** ai elementelor matricei ***^tA.***

De exemplu,

Pentru matricea $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$$

$$unde: A_{11}=(-1)^{1+1}a_{22}=a_{22}; A_{21}=(-1)^{2+1}a_{12}=-a_{12}; A_{12}=(-1)^{1+2}a_{21}=-a_{21}; A_{22}=(-1)^{2+2}a_{11}=a_{11} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Pentru matricea $$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow {}^tA=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & a_{31} \\ a_{12} & a_{22} & a_{32} \\ a_{13} & a_{23} & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow A^*=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$$

$$unde \quad A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{32} \\ a_{23} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{32} \\ a_{13} & a_{33} \end{vmatrix}, etc.$$

Putem acum să enunţăm teorema care exprimă ***condiţia necesară şi suficientă de inversabilitate*** a unei matrice.

Teoremă:

O matrice **A** din $M_n(C)$, unde n *e* {2, 3} **este inversabilă** dacă si numai dacă **detA ≠ 0**.

Dacă *A* este inversabilă, atunci: $$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$$

Demonstraţie.

Fie *A* o matrice inversabilă, deci există $\mathbf{A^{-1}}$ *astfel* încât $\mathbf{A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I_n}$. Rezultă că: $\det A \cdot \det A^{-1} = \det I_n = 1$, de unde detA≠0 .
Am arătat astfel că pentru inversabilitatea unei matrice, condiţia ca determinatul să fie nenul este *necesară.*

Pentru a demonstra suficienţa condiţiei, folosim relaţia: $\mathbf{A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot I_n}$**,** (1).

Vom verifica această proprietate pentru cazul *n = 2.*

$$A \cdot A^* = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} & 0 \\ 0 & a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \det A & 0 \\ 0 & \det A \end{pmatrix} = \det A \cdot I_2$$

Analog se obţine $\mathbf{A^* \cdot A = \det A \cdot I_2}$.

Dacă detA ≠0 , din relaţia (1), rezultă $A \cdot (\frac{1}{\det A} A^*) = (\frac{1}{\det A} A^*) \cdot A = I_n \Rightarrow A - invers.$ şi $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*$

Definiţie: O matrice pătrată de ordinul $n(n = 2$ sau $n = 3)$ se numeşte:

- **matrice singulară** dacă **determinatul său este nul**;
- **matrice nesingulară** dacă **determinantul său este nenul.**

Folosind această definiţie rezultă că:

o matrice A din **$M_n(C)$** unde n *e* {2, 3} **este inversabilă dacă şi numai dacă este nesingulară.**

Comentariu:

Demonstraţia teoremei precedente implică următorul **_algoritm de calcul al matricei inverse_** a unei matrice pătratice *A.*

- *Pasul* 1: se calculează $d=\det A$. Dacă $d=O$ atunci *A* nu este inversabilă, iar dacă $d \neq 0$ atunci se trece la pasul următor.
- *Pasul* 2: se scrie matricea transpusă.
- *Pasul* 3: se calculează complemenţii algebrici ai elementelor matricei transpuse.
- *Pasul* 4: se scrie matricea adjunctă A^*.
- *Pasu*

$$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^*}$$

Proprietăţi.

1. Dacă o matrice este inversabilă, inversa ei este unică.
2. Dacă *A* este inversabilă, inversa ei, A^{-1} este inversabilă şi

$$(A^{-1})^{-1} = A$$

3. Dacă *A* şi *B* sunt inversabile atunci *AB* este inversabilă şi

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

4. Dacă *A* este inversabilă, atunci

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}$$

Demonstraţie. 1. Presupunem că matricea *A* admite ca inverse, matricele A' şi A '', deci $AA' = A'A = I_n$ şi $AA'' = A''A = I_n$.
Atunci $A' = A' I_n = A'(AA'') = (A'A)A'' = I_n A'' = A''$.

♦♦♦ Probleme rezolvate.

1. Calculaţi matricea inversă a fiecăreia dintre matricele: $a)\quad A=\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$ $\quad b)\quad B=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

Soluţie, a) $\det A=\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & -4 \end{vmatrix}=2\neq 0;\quad {}^{t}A=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -4 \end{pmatrix};\quad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} \\ A_{12} & A_{22} \end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}(-4)=-4;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}1=-1;\ A_{21}=(-1)^{2+1}2=-2;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}(-1)=-1;$

$$A^{-1}=\frac{1}{\det A}A^{*}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} -4 & -2 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Soluţie, b) $\det A=\begin{vmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}=-5\neq 0;\quad {}^{t}A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}\quad A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix}$

$A_{11}=(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{12}=(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{13}=(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-3;$

$A_{21}=(-1)^{2+1}\begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-1;\quad A_{22}=(-1)^{2+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix}=-4;\quad A_{23}=(-1)^{2+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}=-2;$

$A_{31}=(-1)^{3+1}\begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}=-2;\quad A_{32}=(-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix}=-2;\quad A_{33}=(-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix}=-1;$

$$A^{*}=\begin{pmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{pmatrix};\quad A^{-1}=-\frac{1}{5}\begin{pmatrix} -1 & 1 & -2 \\ -1 & -4 & -2 \\ -3 & -2 & -1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{1}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{1}{5} & \frac{4}{5} & \frac{2}{5} \\ \frac{3}{5} & \frac{2}{5} & \frac{1}{5} \end{pmatrix}$$

2. Determinaţi elementul *m* din mulţimea $\left\{\frac{21}{4}, 1, 2\right\}$ $dacă\ A = \begin{pmatrix} 1 & 6 & 4 \\ m & 4 & -1 \\ -1 & m & 5 \end{pmatrix}$ este inversabilă şi calculaţi inversa matricei *A* în acest caz.

Soluţie, b)

$\det A = 4m^2 - 29m + 42.$ dacă $m \in R - \left\{\frac{21}{4}, 2\right\} \Rightarrow A - inversabilă.$

Calculăm A^{-1} pentru **m=1**. Avem:

$$d = \det A = 17. \qquad A_{11} = (-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 21, etc \Rightarrow A^* = \begin{pmatrix} 21 & -26 & -22 \\ -4 & 9 & 5 \\ 5 & -7 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{21}{17} & \frac{-26}{17} & \frac{-22}{17} \\ \frac{-4}{17} & \frac{9}{17} & \frac{5}{17} \\ \frac{5}{17} & \frac{-7}{17} & \frac{-2}{17} \end{pmatrix}$$

Observaţie. Pentru unele matrice, **putem observa proprietăţi** care conduc la aflarea directă a inversei, ***folosind definiţia.***

3. Se consideră matricea $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

a) Calculaţi: A^2.

b) Demonstraţi că *A* este inversabilă şi aflaţi *A*

Soluţie,

$$a) A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

b) Rezultă că *A* este inversabilă şi $A^{-1} = A$.

4. Se consideră matricele $X = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \\ 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}, \quad Y = I_3 - X$

a) Calculaţi X^2.

b) Arătaţi că matricea Y este inversabilă şi aflaţi inversa.

Soluţie. $a) \quad X^2 = O_3$

$$b)(I_3 - X)(I_3 + X) = (I_3 + X)(I_3 - X) = I_3 - X^2 = I_3 \Rightarrow Y = I_3 - X \text{ este inversab. şi } Y^{-1} = I_3 + X = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 3 & -3 \end{pmatrix}$$

EXERCIŢII DE INIŢIERE

1.) Pentru fiecare dintre matricele de mai jos, scrieţi matricea adjunctă: $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$, $B=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 3 & 0\end{pmatrix}$, $C=\begin{pmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$

2.) Pentru matricea $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$ determinaţi matricea adjunctă A^* şi verificaţi relaţia: $A \cdot A^* = A^* \cdot A = \det A \cdot I_3$.

3.) Care dintre matricele următoare sunt inversabile $\begin{pmatrix}2 & 5\\ 0 & 6\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}3 & 6\\ 1 & 2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 2 & 4 & 6\\ 3 & 6 & 9\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1 & 2\\ 0 & 2 & 0\\ 2 & 0 & 0\end{pmatrix}$?

4.) Aflaţi *x e* R ştiind că matricea $A=\begin{pmatrix}x & 2\\ 2 & x+3\end{pmatrix}$ este inversabilă, iar matricea $B=\begin{pmatrix}x & 1\\ 1 & x\end{pmatrix}$ nu este inversabilă. Aflaţi inversa matricei *A.*

5.) Demonstraţi că următoarele matrice sunt inversabile si calculaţi inversele lor.

$a)\begin{pmatrix}0 & 1\\ 3 & 0\end{pmatrix}$; $b)\begin{pmatrix}1 & 1\\ 3 & 2\end{pmatrix}$; $c)\begin{pmatrix}i & 0\\ 0 & i\end{pmatrix}$; d) $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 5\end{pmatrix}$; e) $\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 1 & 2\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$; f) $\begin{pmatrix}0 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 0\end{pmatrix}$

g) $\begin{pmatrix}\cos a & \sin a\\ -\sin a & \cos a\end{pmatrix}$ $a \in R$; h) $\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}$; i) $\begin{pmatrix}0 & 0 & i\\ 0 & i & 0\\ i & 0 & 0\end{pmatrix}$; j) $\begin{pmatrix}3 & -1 & 0\\ -2 & 1 & 1\\ 2 & -1 & 4\end{pmatrix}$

6.) Ştiind că $X=\begin{pmatrix}2 & 1\\ 4 & 3\end{pmatrix}$ arătaţi că *X* este inversabilă si calculaţi $\mathbf{X^2 + X^{-1}}$.

PROBLEME ♦ PROBLEME ♦ PROBLEME

1. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}\in M_3(R), a,b,c\in R^*.$ Demonstraţi că matricea A este inversabilă si aflaţi inversa.

2. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & b & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(R)$

a) Pentru ce valori ale lui a şi b matricea este nesingulară ?

b) în cazul *a* = *b* = *2,* aflaţi inversa

Rezolvaţi aceeaşi problemă, pentru matricea $B=\begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & a & b \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

3. Fie matricea $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 1 & x & 1 \\ x & 1 & 1 \end{pmatrix}\in M_3(R)$

a) Pentru ce valori ale lui *x* matricea este singulară ?

b) Pentru *x* = -1, aflaţi inversa

4. Fie $A\in M_3(R), cu: A^2+3A+2I_3=O_3$

a) Arătaţi că cel puţin una dintre matricele **I_3+A** şi **$2I_3$ +A** nu este inversabilă.

b) Demonstraţi că *A* este inversabilă si calculaţi inversa ei.

5. Calculaţi **$(A \bullet B)^{-1}$** dacă $a) A^{-1}=\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $A^{-1}=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -4 \end{pmatrix},\ B^{-1}=\begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & 1 \end{pmatrix}$

6. Fie *a e* R. Considerăm matricele: $A=\begin{pmatrix} 1 & -a & 0 \\ 0 & 1 & -a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ şi $B=\begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Arătaţi că: $A^{-1}=B$