Cap III.- DERIVABILITATE

Observarea şi înţelegerea unor situaţii concrete a condus, de-a lungul timpului, la necesitatea exprimării acestora prin modele matematice adecvate.
Astfel, noţiunea de derivată a apărut din necesitatea studierii existenţei şi construirii **tangentei la o curbă într-un punct** al domeniului său de definiţie cât şi din studierea vitezei şi acceleraţiei unui mobil în mişcare.
Această noţiune a fost introdusă aproape în acelaşi timp şi este atribuită în egală măsură lui Gottfried **Leibniz** (1646-1716) şi lui Isaac **Newton** (1643-1727), întemeietorii calcului diferenţial şi integral.

Calculul diferenţial - capitol al analizei matematice care studiază funcţiile utilizând derivata .
Calculul integral - capitol al analizei matematice care studiază integrala definită şi integrala nedefinită

FUNCŢII DERIVABILE

1. Exemple pregătitoare

Tangenta la o curbă

Considerăm funcţia f: R→R, $f(x)=x^2$ al cărei grafic este parabola din figură.
Intuiţia ne arată că parabola admite tangentă în fiecare punct al său (de exemplu tangenta în origine este axa *Ox)*

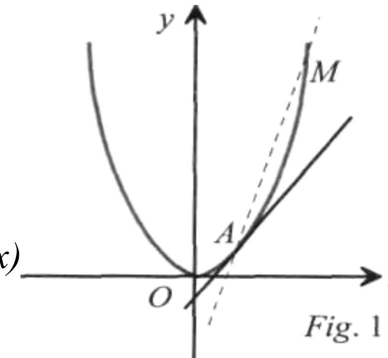


Fig. 1

Ne propunem să scriem ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă $x_0 = 1$, adică în punctul A(1, 1).
Ecuaţia căutată este de forma y-1 =m(x- 1), unde ***m*** reprezintă ***coeficientul unghiular (panta).***
Considerăm pe grafic punctul mobil *M(x, f(x)).*

Coeficientul unghiular al dreptei *AM* este $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\dfrac{x^2-1}{x-1}=x+1$

Este normal să considerăm că atunci când x → 1 (adică *M* tinde la *A),* secanta *AM* devine tangentă la grafic. Deci, **coeficientul unghiular al tangentei este** $\boxed{m=\lim\limits_{x\to x_0}\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}}=\lim\limits_{x\to 1}(x+1)=2$

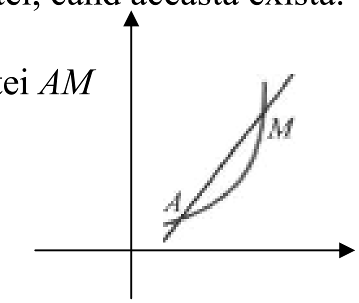
Rezultă că **ecuaţia tangentei** în punctul *A* este **y-1 = 2(x - 1).**

Considerăm acum **<u>cazul general al unei funcții continue pe un interval</u>**.

Dorim să precizăm înțelesul noțiunii de tangentă la grafic într-un punct dat al său şi să aflăm ecuația tangentei, când aceasta există.

Fie $A(x_0, f(x_0))$ un punct fixat şi $M(x, f(x))$ un punct mobil, situate pe grafic.

Tangenta *în A* la grafic este poziția limită la care tinde dreapta *AM* atunci când x tinde la x_0. Cum panta dreptei *AM* este $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$, graficul are tangentă în *A* dacă există $\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$



Dacă această limită este finită, ea constituie coeficientul unghiular al tangentei.

Reține !

- *Dacă* $\boxed{m=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in R}$, **<u>ecuația tangentei</u>** *la graficul funcției f în punctul* $A(x_0, f(x_0))$ *este* $\mathbf{y-y_0=m\cdot(x-x_0)}$.
- *Dacă* $\boxed{m=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=\pm\infty}$, **tangenta la grafic este verticală**, *deci ecuația ei este* $\mathbf{x=x_0}$.
- *Dacă raportul* $\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ **nu are limită** *în* x_0, *graficul* **nu are tangentă** *în punctul A.*

<u>Viteza momentană</u> *<u>(instantanee) a unui mobil în mişcare rectilinie şi neuniformă</u>*

Considerăm un mobil care se deplasează pe o axă. în momentul *t* mobilul se află în punctul de abscisă *S(t)*. În cazul unei mişcări uniforme, viteza mobilului este aceeaşi în fiecare moment, valoarea ei fiind $v=\frac{S(t_2)-S(t_1)}{t_2-t_1}$, unde t_1 şi t_2 sunt arbitrare .

În cazul când mobilul are o mişcare neuniformă, adică viteza nu este constantă, ne punem problema modului în care trebuie definită viteza într-un moment t_0. Viteza medie corespunzătoare intervalului de timp $[t_0, t]$ este $\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}$ iar viteza în momentul t_0 notată $v(t_0)$ se defineşte ca fiind limita la care tinde acest raport când $t\to t_0$. Deci $\boxed{v(t_0)=\frac{S(t)-S(t_0)}{t-t_0}}$.

(Altfel spus, viteza momentană este limita la care tinde raportul dintre variația spațiului şi variația timpului atunci când variația timpului tinde la 0. Se notează: $\boxed{v(t)=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta S}{\Delta t}}$

2. Derivata unei funcţii într-un punct

Definiţie:

Fie $D \subset R$, $f : D \rightarrow R$ şi $x_0 \in D$ un punct de acumulare pentru D.

Spunem că **f are *derivată* în x_0** dacă există $\displaystyle\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \in \overline{R}$

în caz contrar spunem că f nu are derivată în x_0.

Derivata în x_0 se notează cu ***f '(x₀)*** **,** şi avem:

$$f'(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Consecinţa 1.

Dacă $f'(x_0) \in R$ atunci **ecuaţia tangentei** la graficul lui f în punctul de abscisă x_0 este

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

Consecinţa 2.

Dacă $f'(x_0) = \pm\infty$ şi f este continuă în x_o, atunci tangenta la graficul funcţiei în x_0 este verticală, deci are ecuaţia $\boldsymbol{x = x_0}$.

Observaţie.

Dacă $f'(x_0) = 0$, atunci tangenta la grafic în x_0 este orizontală şi are ecuaţia $\boldsymbol{y = f(x_0)}$.

Exemple.

1. Să calculăm f '(1) unde f:R→R, *f(x)* = x^3 şi să determinăm ecuaţia tangentei la grafic în punctul de abscisă $x_0 = 1$.

Avem:

$$f'(1) = \lim_{x\to1}\frac{f(x)-f(1)}{x-1} = \lim_{x\to1}\frac{x^3-1}{x-1} = \lim_{x\to1}\left(x^2+x+1\right) = 3$$

Ecuaţia tangentei cerute este y-f (l) =f '(l)(x- 1), adică y- 1 = 3(x- 1) sau y = 3x-2 .

2. Să calculăm f '(0) pentru funcţia f:R→R, $f(x)=\sqrt[3]{x}$ şi să scriem ecuaţia tangentei la grafic în $x_0 = 0$.

Vom avea

$$f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\frac{\sqrt[3]{x}-0}{x} = \lim_{x\to0}\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}} = +\infty$$

Tangenta la grafic este verticală, deci ecuaţia tangentei cerute este dreapta de ecuaţie $x = 0$.

3. Funcţia f: R→R, unde $f(x)=\begin{cases} x\cos\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ 0, x=0 \end{cases}$, nu are derivată în $x_o = 0$.

într-adevăr, raportul $f'(0) = \lim_{x\to0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x\to0}\cos\frac{1}{x}, \textit{nu există}$,nu are limită în origine.

Observaţie.

Să presupunem că pentru funcţia f:D→R există f '(x_o) pentru x_0 *e D.*

notând $\boxed{x-x_0=h}$ vom avea

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{h\to0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}}$$

3. Derivate laterale

Deoarece noțiunea de derivată a unei funcții f într-un punct x_o al domeniului de definiție a fost introdusă cu ajutorul limitei în x_o a raportului $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ se poate pune problema existenței limitelor laterale ale acestui raport în x_0 .

Definiție

Fie f:D→ *R*.

• Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare la stânga al mulțimii *D,* spunem că funcția f are ***derivată la stânga*** în x_0 dacă există

$$f_s'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x<x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{R}$$

• Dacă $x_0 \in D$ este un punct de acumulare la dreapta al mulțimii *D,* spunem că funcția f are ***derivată la dreapta*** în x_0 dacă există

$$f_d'(x_0)=\lim_{\substack{x\to x_0\\ x>x_0}}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\in\overline{R}$$

Derivatele la stânga şi la dreapta în punctul x_0 se numesc **derivate laterale**.

Exemple. **1.** Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=\begin{cases} x\cdot e^{-\frac{1}{x}} & ,\ x<0\\ 0 & ,\ x\geq 0\end{cases}$ avem:

$$f_s'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}\frac{xe^{-\frac{1}{x}}-0}{x-0}=\lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}}e^{-\frac{1}{x}}=\infty,\ f_d'(0)=\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}}\frac{0}{x}=0.$$

2. Pentru funcția $f:\mathbf{R}\to\mathbf{R},\ f(x)=|x-1|$, avem:

$$f_s'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x<1}}\frac{-x+1}{x-1}=-1,\ f_d'(1)=\lim_{\substack{x\to 1\\ x>1}}\frac{x-1}{x-1}=1.$$

Teoremă:

Fie $D \subset R$, $f: D \rightarrow R$ şi $x_0 \in D$ punct de acumulare bilateral al lui D.
Funcția f are derivată în x_0 dacă şi numai dacă f are derivate laterale în x_o *şi* $f_s'(x_0) = f_d'(x_0)$.
în acest caz

$$\boxed{f'(x_0)=f_s'(x_0) = f_d'(x_0)}$$

Observație.
Pentru $f: [a, b] \rightarrow R$, prin derivata lui f în *a* se înțelege $f_d'(a)$, iar prin derivata lui f în *b* se înțelege $f_s'(b)$.

❖ **Problemă rezolvată.** Determinați numărul real a, astfel încât funcția $f: \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax & , x \le 0 \\ x & , x > 0 \end{cases}$ să aibă derivată în $x_0 = 0$.

Soluție. Calculăm $f_s'(0)$ și $f_d'(0)$. Avem $f_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x<0}} \frac{x^2+ax}{x} = a$ și $f_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0 \\ x>0}} \frac{x}{x} = 1$.

Deci, există $f'(0)$ dacă și numai dacă $f_s'(0) = f_d'(0)$, adică $a = 1$.

Interpretarea geometrică a derivatelor laterale

Fie f : D →R continuă şi $x_o \in D$ astfel încât există $f_s'(x_0)$ şi $f_d'(x_0)$.

Putem avea următoarele situații:

a) $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) \in R$ În acest caz ,f are derivată în x_o şi graficul lui *f* admite **tangentă** în punctul $A(x_0, f(x_0))$ **care are ecuația**:

$$y - f(x_0) = f'(x_0)(x - x_0)$$

b) $f_s'(x_0) = f_d'(x_0) = \pm\infty$ În acest caz graficul funcției f admite **tangentă** în punctul $A(x_0, f(x_0))$ **de ecuație** $x = x_0$ (dreaptă paralelă cu *Oy*).

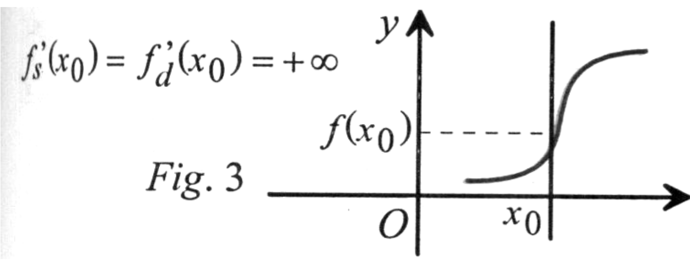


Fig. 3

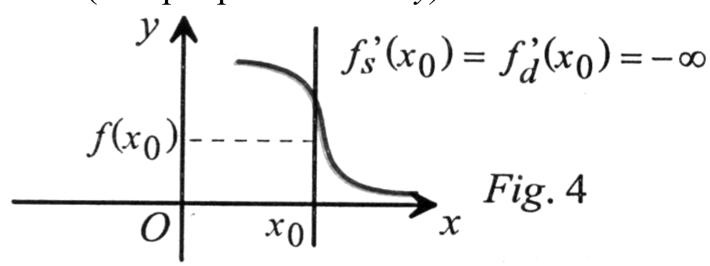


Fig. 4

c) $f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)$ şi cel puțin una dintre ele este finită.

în acest caz **graficul admite în punctul *A(x₀, f(x₀))* două semitangente**: semitangenta la dreapta (a cărei pantă este $f_d'(x_0)$) şi semitangenta la stânga (a cărei pantă este $f_d'(x_0)$).

Punctul *A* se numeşte ***punct unghiular***. **Unghiul determinat de cele două semitangente are măsura în intervalul (O, *π*).**

◆ $\begin{cases} f_s'(x_0) = -\infty \\ f_d'(x_0) \in \mathbf{R} \end{cases}$

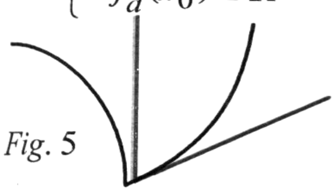


Fig. 5

◆ $\begin{cases} f_s'(x_0) = +\infty \\ f_d'(x_0) \in \mathbf{R} \end{cases}$

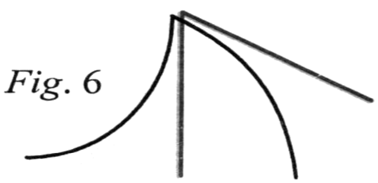


Fig. 6

◆ $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbf{R} \\ f_d'(x_0) = -\infty \end{cases}$

Fig. 7

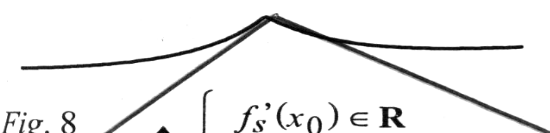


Fig. 8

◆ $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbf{R} \\ f_d'(x_0) \in \mathbf{R} \text{ (și diferite)} \end{cases}$

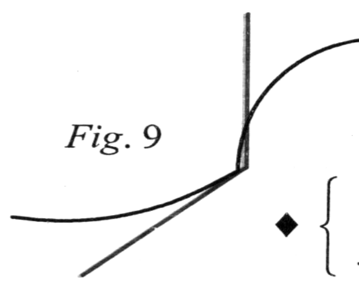


Fig. 9

◆ $\begin{cases} f_s'(x_0) \in \mathbf{R} \\ f_d'(x_0) = +\infty \end{cases}$

d) $\boxed{f_s'(x_0) \text{ sau } f_d'(x_0) = \pm\infty \text{ și } f_s'(x_0) \neq f_d'(x_0)}$

În acest caz, f nu are derivată în x_0 iar **punctul** ***$A(x_0, f(x_0))$*** se numeşte ***punct de întoarcere*** pentru graficul funcției.

$f_s'(x_0) = +\infty,\ f_d'(x_0) = -\infty$

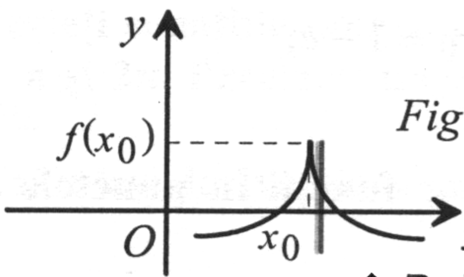


Fig. 10

$f_s'(x_0) = -\infty,\ f_d'(x_0) = +\infty$

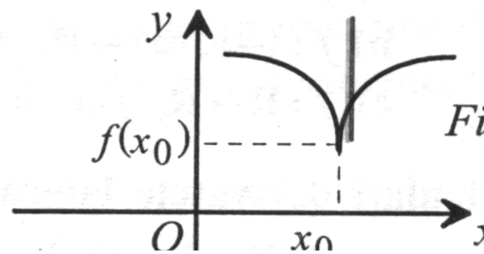


Fig. 11

în punctul de întoarcere, cele două semitangente se suprapun.

❖ **Problemă rezolvată.** a) Demonstrați că punctul de abscisă $x_0 = 1$ este punct unghiular pentru graficul funcției $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x \leq 1 \\ 1 - x^2, & x > 1 \end{cases}$. Reprezentați graficul funcției f.

b) Arătați că punctul de abscisă $x_0 = 0$ este punct de întoarcere pentru graficul funcției $g : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $g(x) = \sqrt{|x|}$ și reprezentați graficul funcției g.

Soluție. a) Evident, f este continuă în punctul $x_0 = 1$.

Avem: $f_s'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} (x+1) = 2$ și

$f_d'(1) = \lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1-x^2}{x-1} = -\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} (x+1) = -2.$

Deci $A(1, f(1))$ este un punct unghiular pentru graficul funcției f.

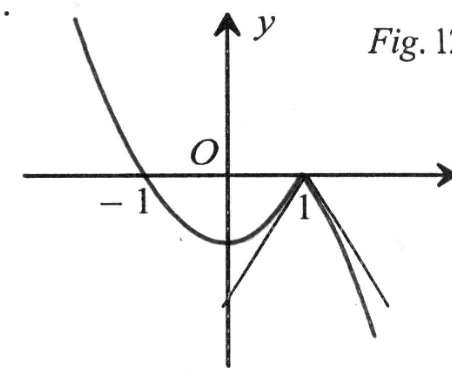


Fig. 12

b) Evident, g este continuă în punctul $x_0 = 0$.

Avem $g_s'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{\sqrt{-x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \frac{-1}{\sqrt{-x}} = -\infty$ și

$g_d'(0) = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{\sqrt{x} - 0}{x - 0} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty.$

Așadar originea este un punct de întoarcere pentru graficul lui g.

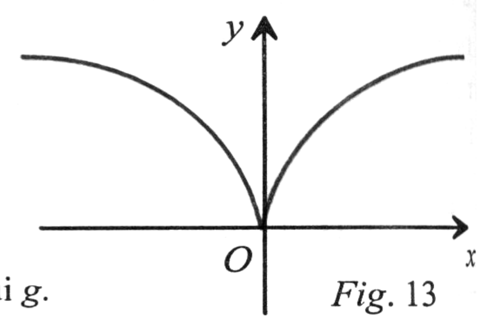


Fig. 13

EXERCIȚII DE INIȚIERE

1. Precizați domeniul maxim de definiție $D \subset R$ pentru fiecare funcție $f: D \to R$, definită mai jos și apoi calculați derivata lui f în punctul specificat.

a) $f(x) = 2x + 3$ în $x = 1$;
b) $f(x) = 3x^2 - x - 1$ în $x = \frac{1}{2}$;
c) $f(x) = \frac{2x}{x-1}$ în $x = 0$;
d) $f(x) = \sqrt{x} - 1$ în $x = 4$;
e) $f(x) = 3\cos x$ în $x = 0$.

2. Scrieți ecuația tangentei la graficul funcției f în punctul specificat:

a) $f: R \to R,\ f(x) = x^3 - 1$ în $x_0 = 1$;
b) $f: (-e, \infty) \to R,\ f(x) = \ln(x + e)$ în $x_0 = 1 - e$;
c) $f: R \to R,\ f(x) = -2\sin x$ în $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Calculați derivatele laterale ale următoarelor funcții în punctele specificate:

a) $f: R \to R,\ f(x) = |2x - 1|$ în $x_0 = \frac{1}{2}$;

b) $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x^2 - 1, & x < \frac{\pi}{2} \\ \sin x, & x \geq \frac{\pi}{2} \end{cases}$ în $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

4. Determinați $a \in R$ știind că funcțiile următoare admit derivată în punctele menționate:

a) $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} x^2 + a, & x < 0 \\ a\cos x, & x \geq 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$;

b) $f: R \to R,\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{x + a^2}, & x \geq 0 \\ |a| \cdot (x + 1), & x < 0 \end{cases}$ în $x_0 = 0$.

PROBLEME ◆ PROBLEME ◆ PROBLEME

1. Precizați domeniul maxim de definiție $D \subset \mathbb{R}$ pentru fiecare funcție $f: D \to \mathbb{R}$ definită mai jos și apoi arătați că f are derivată în punctele specificate.

a) $f(x) = x^2 - x$; $x = -1$, $x = 0$; b) $f(x) = e^x + 1$; $x = 1$, $x = \frac{1}{2}$;

c) $f(x) = \sqrt{x+5}$; $x = 0$, $x = -2$; d) $f(x) = \frac{1}{x^3 + x}$; $x = 1$, $x = 2$;

e) $f(x) = \ln(1+x)$; $x = 0$, $x = -\frac{1}{2}$; f) $f(x) = 2\sin x$; $x = \pi$, $x = \frac{\pi}{6}$;

g) $f(x) = \sqrt{\frac{x+1}{x-1}}$; $x = 2$, $x = 3$; h) $f(x) = \mathrm{tg}^2 x$; $x = 0$, $x = \frac{\pi}{3}$.

2. Scrieți ecuația tangentei la graficul fiecăreia dintre funcțiile următoare în punctul specificat:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = (x+2)^2$, $x_0 = 1$;

b) $f: [0, \infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{2x}$, $x_0 = \frac{1}{2}$; c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = e^{3x} - e$, $x_0 = \frac{1}{3}$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \ln(x^2 + 1)$, $x_0 = 0$; e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = -3\cos x$, $x_0 = \frac{\pi}{2}$.

3. Scrieți ecuațiile tangentelor la graficele funcțiilor de mai jos în punctele de intersecție cu axele:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2 - 4$; b) $f: \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{x-1}{x+1}$;

c) $f: [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \cos x$; d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = 2^x - 2$.

4. Un mobil se deplasează pe o traiectorie rectilinie conform legii $S(t) = t^2 + 2t$ unde t este timpul (în secunde), iar $S(t)$ este spațiul parcurs până în momentul t ($S(t)$ este exprimat în metri). Calculați:

a) viteza medie a mobilului în intervalul de timp cuprins între 3 secunde și 5 secunde;

b) viteza în momentele $t_1 = 3$, $t_2 = 4$, $t_3 = 5$.

5. Scrieți ecuațiile tangentelor la graficul funcției sinus în punctele de abscisă 0, π și 2π. Precizați unghiurile pe care aceste tangente le formează cu axa Ox.

6. Calculați derivatele laterale ale funcțiilor următoare în punctele specificate:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3, & x < 2 \\ 10 - 3x, & x \geq 2 \end{cases}$, $x_0 = 2$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{|x-1|}{x^2+1}$, $x_0 = 1$;

c) $f: [-1, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2x, & -1 \leq x \leq 0 \\ \ln x, & 0 < x \leq 2 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sin x, & x < 0 \\ 0, & x = 0 \\ 1 - \cos x, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 2^x, & x < 1 \\ 3x - 1, & x \geq 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

7. Determinați $a \in \mathbb{R}$ știind că funcțiile următoare admit derivată în punctele menționate:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} ax^2, & x \leq 1 \\ x^2, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} x^3 + ax^2, & x \leq 0 \\ x^3, & x > 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot |x - a|$, $x_0 = a$.

8. Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos, stabiliți dacă punctele, având abscisele menționate, sunt puncte de întoarcere sau puncte unghiulare:

a) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x}, & x \geq 0 \\ \sin x, & x < 0 \end{cases}$, $x_0 = 0$;

b) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \max(x, x^3 - x)$, $x_0 = 0$, $x_1 = -\sqrt{2}$, $x_2 = \sqrt{2}$;

c) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x \cdot \sqrt{|x|}$, $x_0 = 0$;

d) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sqrt{|x^2 - x - 2|}$, $x_0 = -1$, $x_1 = 2$;

e) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = |x - 1| + |x + 1|$, $x_0 = -1$, $x_1 = 1$;

f) $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ x + \sqrt{x-1}, & x > 1 \end{cases}$, $x_0 = 1$.

Prof:Ciocotişan Radu