# Cap.4-STUDIUL FUNCŢIILOR CU AJUTORUL DERIVATELOR

## ROLUL PRIMEI DERIVATE IN STUDIUL FUNCŢIILOR

Prima derivată a unei funcţii se dovedeşte a fi utilă în studiul intervalelor de monotonie ale funcţiei şi al punctelor de extrem.

Fie f: I→R, o funcţie derivabilă pe intervalul I. Atunci, pentru orice $x_0$ fixat în I şi orice x *e* I \ $\{x_0\}$, avem

$$\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0 \Rightarrow f'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0} \geq 0$$

Cum $x_0$ a fost ales arbitrar în I , rezultă f '(x)>0 pentru orice x *e* I.

Am arătat astfel că **derivata unei funcţii crescătoare pe un interval este pozitivă**.

Analog se demonstrează că **derivata unei funcţii descrescătoare pe un interval este negativă**.

Se poate demonstra că **sunt adevărate şi reciprocele afirmaţiilor de mai sus**.

Mai precis, vom enunţa o teoremă care stabileşte legătura dintre semnul derivatei unei funcţii si monotonia acestei funcţii.

## Teoremă

Fie f: **I→R,** o funcţie derivabilă pe intervalul I.

Avem: a) ***f ' ≥ 0*** dacă şi numai dacă ***f este crescătoare***.

b) ***f ' ≤ 0*** dacă şi numai dacă ***f este descrescătoare***.

c) Dacă f ' > 0, atunci f este strict crescătoare.

d) Dacă f ' < 0, atunci f este strict descrescătoare.

***Observaţie.***

Reciprocele proprietăţilor c) şi d) nu sunt adevărate, adică dacă funcţia este strict monotonă, nu rezultă că inegalităţile verificate de derivată sunt stricte

***Exemplu,*** *f*: **R→ R,** *f(x)* = $x^3$ este strict crescătoare pe R, dar f ‘ se anulează în 0.

# Probleme rezolvate.

**1.** Studiaţi monotonia funcţiei f:R→R, $f(x) = arctgx - x$.

**Soluţie.**

$$f'(x) = \frac{1}{x^2+1} - 1 = -\frac{x^2}{x^2+1} \le 0$$ deci funcţia este descrescătoare pe R.

**2.** Aflaţi intervalele de monotonie ale funcţiei f:R→R, $f(x) = 8x^4 - x^2$.

**Soluţie.**

$f'(x) = 32x^3 - 2x = 2x(4x - 1)(4x + 1)$.
Trecem semnul derivatei şi concluziile privind intervalele de monotonie în următorul tabel de variaţie:

| $x$ | $-\infty$ | | $-\frac{1}{4}$ | | $0$ | | $\frac{1}{4}$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $---$ | $0$ | $+++$ | $0$ | $---$ | $0$ | $+++$ | |
| $f(x)$ | $\infty$ | ↘ | $-\frac{1}{32}$ | ↗ | $0$ | ↘ | $-\frac{1}{32}$ | ↗ | $\infty$ |

**3.** Demonstraţi că:

a) dacă $f:I \to R$ este derivabilă pe intervalul I, f ' >0 pe I şi nu există nici un interval (a, b) $\subset I$ cu $a < b$ pe care f ' să fie nulă,
atunci f este *strict* crescătoare;

b) dacă f : I→R este derivabilă pe intervalul I, f ' < 0 pe I şi nu există niciun interval (a, b) $\subset I$ cu $a < b$ pe care f ' să fie nulă,
atunci f este *strict* descrescătoare.

**Soluţie.**

a) Din faptul că $f' > 0$ pe I rezultă că f este crescătoare. Dacă presupunem că f nu este strict crescătoare, există $a, b, a<b$ astfel încât $f(a) = f(b)$. Atunci, pentru orice $x \in (a, b)$ avem $f(a) \le f(x) \le f(b)$, deci $f(x) = f(a) = f(b)$, adică f este constantă pe $[a, b]$, prin urmare are derivata nulă pe $(a, b)$, ceea ce contrazice ipoteza.

# Determinarea punctelor de extrem

Considerăm funcţia f:R→R, $f(x)=\dfrac{x}{x^2+1}$

Derivata ei este $f'(x)=\dfrac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$

Din tabelul de variaţie al funcţiei deducem că cea mai mică valoare a funcţiei este $-\dfrac{1}{2}$ (pentru $x$ = -1), iar cea mai mare valoare este $\dfrac{1}{2}$ (pentru $x$ = 1).

| x | -∞ | | -1 | | 1 | | +∞ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| f ’(x) | | ---------- | 0 | ++++++++++++++++++++++ | 0 | --------------- | |
| f(x) | 0 | ↘ | $-\frac{1}{2}$ | ↗ | $\frac{1}{2}$ | ↘ | 0 |

Spunem că - 1 este punct de minim, iar 1 este punct de maxim.

Un **punct de extrem** poate fi identificat **pe baza semnului derivatei** în vecinătatea punctului respectiv.

Fie f: I →R, o funcţie continuă pe intervalul I şi $x_0$ din I .

***Cazul I:*** $x_0$ este un punct interior intervalului $I$ și $f$ este derivabilă pe $(a,b)\setminus\{x_0\}$, unde $x_0\in(a,b)\subset I$.

- Dacă $f'>0$ pe $(a,x_0)$ și $f'<0$ pe $(x_0,b)$, atunci $x_0$ este punct de maxim.

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+++$ | | $---$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $f(x_0)$<br>$M$ | ↘ | |

- Dacă $f'<0$ pe $(a,x_0)$ și $f'>0$ pe $(x_0,b)$, atunci $x_0$ este punct de minim.

| $x$ | $a$ | | $x_0$ | | $b$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $---$ | | $+++$ | |
| $f(x)$ | | ↘ | $f(x_0)$<br>$m$ | ↗ | |

***Cazul II***: $x_0$ este capătul din stânga al lui $I$ și $f$ este derivabilă pe $(x_0, b) \subset I$.

- Dacă $f' > 0$ pe $(x_0, b)$, atunci $x_0$ este punct de minim.

| $x$ | $x_0$ | $b$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | |
| $f(x)$ | $f(x_0)$ $m$ | $\nearrow$ |

- Dacă $f' < 0$ pe $(x_0, b)$, atunci $x_0$ este punct de maxim.

| $x$ | $x_0$ | $b$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $---$ | |
| $f(x)$ | $f(x_0)$ $M$ | $\searrow$ |

***Cazul III***: $x_0$ este capătul din dreapta al lui $I$ și $f$ este derivabilă pe $(a, x_0) \subset I$.

- Dacă $f' > 0$ pe $(a, x_0)$, atunci $x_0$ este punct de maxim.

| $x$ | $a$ | $x_0$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+++$ | |
| $f(x)$ | $\nearrow$ | $f(x_0)$ $M$ |

- Dacă $f' < 0$ pe $(a, x_0)$, atunci $x_0$ este punct de minim.

| $x$ | $a$ | $x_0$ |
|---|---|---|
| $f'(x)$ | $---$ | |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $f(x_0)$ $m$ |

## Observaţie.

Evident că rezultatele de mai sus nu trebuie memorate, punctele de extrem se citesc simplu din tabelul de variaţie.

♦ **Problemă rezolvată.**

Determinaţi punctele de extrem ale funcţiilor:

a) $f: [2, 4] \to \mathbf{R}$, $f(x) = \sqrt{-x^2 + 6x - 8}$;  b) $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = |e^x - 1|$.

***Soluție.*** a) Avem $f'(x) = \dfrac{3-x}{\sqrt{-x^2+6x-8}}$, $(\forall)\ x \in (2, 4)$ și $f_d'(2) = \infty$ și $f_s'(4) = -\infty$;

deci $f$ nu este derivabilă în 2 și 4. Tabelul de variaţie este

| $x$ | 2 | | 3 | | 4 |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $\mid \infty$ | $++$ | $0$ | $--$ | $-\infty \mid$ |
| $f(x)$ | 0 | $\nearrow$ | 1 | $\searrow$ | 0 |

Rezultă că 2 și 4 sunt puncte de minim iar 3 este punct de maxim.

b) Avem $f'(x) = \begin{cases} e^x &, x > 0 \\ -e^x &, x < 0 \end{cases}$, iar derivatele laterale în 0 sunt $-1$ și 1,

deci 0 este punct unghiular. Din tabelul următor, rezultă că 0 este punct de minim:

| $x$ | $-\infty$ | | 0 | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $---$ | $-1 \mid +1$ | $+++$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | 0 | $\nearrow$ | |

***Observații.*** **1.** Din studiul monotoniei și al punctelor de extrem se pot obține și alte informații despre funcție. Astfel, folosind și proprietatea valorilor intermediare se poate afla imaginea funcției.

**2.** De asemenea, se poate determina semnul funcției, pe baza unei observații de tipul următor: dacă $f$ este crescătoare pe $[a, b)$ și $f(a) \geq 0$, atunci $f(x) \geq 0$ pentru orice $x \in [a, b)$.

❖ **Probleme rezolvate.** **1.** Pentru funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, aflați intervalele de monotonie, punctele de extrem și imaginea.

***Soluție.*** $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$. Completăm tabelul de variație (în care trecem și limitele funcției la capetele domeniului):

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- - -$ | $0$ | $+ + +$ | |
| $f(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $-1$ | $\nearrow$ | $1$ |

. Funcția este strict descrescătoare pe $(-\infty, 0]$, strict crescătoare pe $[0, \infty)$, 0 fiind punct de minim iar imaginea este $[-1, 1)$.

**2.** Fie funcția $f: \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right] \to [-1, 1]$, $f(x) = \sin x - x\cos x$.

a) Stabiliți semnul funcției.

b) Demonstrați că funcția este bijectivă.

***Soluție.*** a) $f'(x) = x\sin x$. Tabelul de variație este:

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $+ + +$ | $0$ | $+ + +$ | |
| $f(x)$ | $-1$ | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | $1$ |

.

Rezultă semnul funcției:

| $x$ | $-\frac{\pi}{2}$ | | $0$ | | $\frac{\pi}{2}$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f(x)$ | | $- - -$ | $0$ | $+ + +$ | |

.

b) Funcția este strict crescătoare, deci injectivă. Din tabelul de variație și din faptul că funcția este continuă (deci are proprietatea valorilor intermediare), rezultă că $f\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right) = [-1, 1]$, adică funcția este surjectivă.

**3.** Dintre toate triunghiurile dreptunghice cu ipotenuza de lungime $a$, aflați-l pe cel care are perimetrul maxim.

***Soluție.*** Notăm cu $x$ lungimea uneia dintre catete. Perimetrul este $p(x) = a + x + \sqrt{a^2 - x^2}$, unde $x \in (0, a)$. Derivata este $p'(x) = 1 - \frac{x}{\sqrt{a^2-x^2}}$. Se obține tabelul de variație:

| $x$ | $0$ | | $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ | | $a$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $p'(x)$ | | $+ + +$ | $0$ | $- - -$ | $\vert$ |
| $p(x)$ | | $\nearrow$ | $a + a\sqrt{2}$ | $\searrow$ | |

. Maximul se atinge când o catetă este $x = \frac{a\sqrt{2}}{2}$, adică triunghiul este dreptunghic isoscel.

*Aplicație (demonstrarea unor inegalități)*

- Pentru a demonstra o inegalitate de forma $f(x) \geq g(x)$, $(\forall)\ x \in I$, unde $I \subset \mathbf{R}$, este interval, studiem, cu ajutorul derivatei, variația funcției $h = f - g$, arătând că $h$ este pozitivă pe intervalul considerat.

❖ **Probleme rezolvate.** **1.** Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea:

$$x \operatorname{arctg} x \geq \ln\left(1 + x^2\right).$$

***Soluție.*** Notăm $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = x \operatorname{arctg} x - \ln\left(1 + x^2\right)$. Avem $f'(x) = \operatorname{arctg} x - \frac{x}{1+x^2}$. Pentru a stabili semnul lui $f'$, studiem variația lui $f'$ cu ajutorul derivatei sale $f''$. Avem $f''(x) = \frac{2x^2}{(1+x^2)^2} \geq 0$, deci $f'$ este strict crescătoare pe $\mathbf{R}$. Din tabelul de variație al lui $f'$, rezultă că $f'$ este negativă pe $(-\infty, 0)$ și pozitivă pe $(0, \infty)$.

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f''(x)$ | | $+++$ | $0$ | $+++$ | |
| $f'(x)$ | | $\nearrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

Deci se obține pentru $f$ tabelul de variație:

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $---$ | $0$ | $+++$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

,

de unde rezultă concluzia.

**2.** a) Demonstrați că pentru orice $x \in \mathbf{R}$ are loc inegalitatea $e^x \geq x+1$.

b) Fie $x_1, x_2, ..., x_n$, numere pozitive cu proprietatea $x_1 x_2 ... x_n = 1$. Demonstrați că $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

c) Demonstrați inegalitatea mediilor *(Cauchy)*: media aritmetică a oricăror numere pozitive $a_1, a_2, ..., a_n$ este mai mare sau egală decât media lor geometrică, adică $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$.

***Soluție.*** a) Considerând funcția $f: \mathbf{R} \to \mathbf{R}$, $f(x) = e^x - x - 1$, avem $f'(x) = e^x - 1$.

Obținem tabelul de variație

| $x$ | $-\infty$ | | $0$ | | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $- - -$ | $0$ | $+ + +$ | |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | $0$ | $\nearrow$ | |

de unde rezultă concluzia.

b) Folosind inegalitatea de la *punctul* a), avem $e^{x_1 - 1} \geq x_1$, $e^{x_2 - 1} \geq x_2$, ..., $e^{x_n - 1} \geq x_n$. Înmulțind aceste inegalități, rezultă $e^{x_1 + x_2 + ... + x_n - n} \geq x_1 x_2 ... x_n = 1$ de unde $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$.

c) Dacă cel puțin unul dintre numerele $a_1, a_2, ..., a_n$ este nul, inegalitatea este evidentă. În caz contrar, notăm $x_i = \frac{a_i}{G}$, $i \in \{1, 2, ..., n\}$, unde $G = \sqrt[n]{a_1 a_2 ... a_n}$. Avem $x_1 x_2 ... x_n = \frac{a_1 a_2 ... a_n}{G^n} = 1$. Conform *punctului* b), rezultă $x_1 + x_2 + ... + x_n \geq n$ de unde $\frac{a_1+a_2+...+a_n}{n} \geq G$ ceea ce trebuia demonstrat.

## EXERCIȚII DE INIȚIERE

**1.** Folosind derivata, demonstrați că funcțiile definite prin relațiile de mai jos sunt monotone pe domeniul lor de definiție: a) $f(x)=x^3+x-5$; b) $f(x)=2^x$; c) $f(x)=\log_{\frac{1}{2}}x$; d) $f(x)=\log_3 x$; e) $f(x)=\sqrt[3]{x}$.

**2.** Folosind derivata, aflați intervalele de monotonie ale funcțiilor $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definite prin relațiile următoare: a) $f(x)=x^3-12x$; b) $f(x)=\ln(x^2+1)$; c) $f(x)=\frac{1}{x^2+1}$; d) $f(x)=2^x-2^{2x}$.

**3.** Folosind derivata, precizați intervalele de monotonie și punctele de extrem pentru funcția de gradul doi $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^2+bx+c$ în fiecare din cazurile $a>0$ și $a<0$.

**4.** Pentru funcțiile definite prin relațiile de mai jos, aflați domeniul maxim de definiție, intervalele de monotonie și punctele de extrem (dacă există):
a) $f(x)=x-3x^3$; b) $f(x)=x^4-2x^2$; c) $f(x)=4x^3-6x^2-24x+1$;
d) $f(x)=e^x-x$; e) $f(x)=xe^x$; f) $f(x)=|x|$;
g) $f(x)=\ln(4-x^2)$; h) $f(x)=\sqrt{x-2}$.

## PROBLEME ◆ PROBLEME ◆ PROBLEME

**1.** Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos, aflați domeniul maxim de definiție, domeniul de derivabilitate, intervalele de monotonie și punctele de extrem (dacă există). Alcătuiți tabelul de variație:
a) $f(x)=x^4-3$; b) $f(x)=x^4-4x$;
c) $f(x)=x|x|-x$; d) $f(x)=\frac{x^2+4}{x^2}$; e) $f(x)=\frac{x^2+1}{x}$;
f) $f(x)=xe^x$; g) $f(x)=x\ln x$; h) $f(x)=\begin{cases} 2x+7, & x\le -2 \\ x^2-1, & x>-2 \end{cases}$;
i) $f(x)=\frac{1}{|x|-2}$; j) $f(x)=\frac{\ln x+1}{x}$; k) $f(x)=\max(2^x, 3^{-x})$.

**2.** Pentru fiecare dintre funcțiile de mai jos, precizați domeniul maxim de definiție, intervalele de monotonie, punctele de extrem (dacă există) și imaginea: a) $f(x)=x^6+6x$; b) $f(x)=x^2+x|x-2|$; c) $f(x)=\frac{x^2-x+1}{x^2+x+1}$; d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\ln(x^2+1)-2\operatorname{arctg}x$.

**3.** Fie funcția polinomială de gradul trei $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$, unde $a\ne 0$. Demonstrați că:
a) $f$ este crescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a>0$ și $b^2\le 3ac$;
b) $f$ este descrescătoare pe $\mathbb{R}$ dacă și numai dacă $a<0$ și $b^2\le 3ac$.

**4.** Fie $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$, $f(x)=\frac{\ln x}{x}$. a) Calculați $f'(x)$.
b) Demonstrați că $f(x)\le f(e)$, $(\forall)\, x>0$.
c) Deduceți inegalitatea $x^e\le e^x$, $(\forall)\, x>0$.
(Variantă, *Bacalaureat* 2002)

**5.** Determinați valorile parametrului real $m$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2+x+m)e^{2x}$ să fie monotonă pe $\mathbb{R}$.

**6.** Determinați valorile parametrului real $m$ astfel încât funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=(x^2-x+m)e^{-x}$ să aibă puncte de extrem.

**7.** Aflați valorile lui $m$ pentru care funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^5-5(m+1)x^3+15mx+1$ are patru puncte de extrem. Pentru cazul $m=9$, aflați intervalele de monotonie și punctele de extrem.

**8.** Demonstrați că funcțiile următoare sunt bijective:
a) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=3x^5+5x^3+1$; b) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\sin x\cos x$;
c) $f:[0,\infty)\to[0,\infty)$, $f(x)=2\sqrt{x}-\ln(x+1)$;
d) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x+\frac{8x}{x^2+4}-4\operatorname{arctg}\frac{x}{2}$; e) $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=x-\sin x$.

**9.** Demonstrați inegalitățile: a) $\frac{x-1}{x}\le \ln x\le x-1$, $(\forall)\, x\ge 1$;
b) $xe^x+1\ge e^x$, $(\forall)\, x\in[0,\infty)$; c) $2\sin x+\operatorname{tg}x\ge 3x$, $(\forall)\, x\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right)$;
d) $x^2+2\cos x\ge 2$, $(\forall)\, x\in\mathbb{R}$; e) $\ln\sqrt{x}+\frac{\pi}{4}\ge \operatorname{arctg}x$, $(\forall)\, x\in[1,\infty)$;
f) $1+x+\frac{x^2}{2}<e^x<1+x+\frac{x^2e^x}{2}$, $(\forall)\, x>0$.

**10.** Demonstrați că pentru orice $x\ge 0$ și orice $n\in\mathbb{N}^*$ are loc inegalitatea:
$$e^x\ge 1+\frac{x}{1!}+\frac{x^2}{2!}+\ldots+\frac{x^n}{n!}.$$

**11.** Aflați valoarea minimă a sumei pătratelor a două numere dacă produsul lor este 1.

**12.** Aflați volumul maxim al unui con circular drept înscris într-o sferă de rază 1.